

PER SAPERNE DI PIÙ

Caos Chaos

Giulio Casati

Center for Nonlinear and Complex Systems, Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia, Università dell'Insubria, Como, Italia

Giorgio Mantica (*)

Center for Nonlinear and Complex Systems, Dipartimento di Scienza ed Alta Tecnologia, Università dell'Insubria, Como, Italia

INFN - Sezione di Milano, Milano, Italia

INDAM - Gruppo Nazionale di Fisica Matematica, Città Universitaria "La Sapienza", Roma, Italia

Riassunto. In questo lavoro ci proponiamo di illustrare come il caos nasca nei sistemi dinamici, ripercorrendo alcune tappe che hanno portato storicamente alla precisazione di questo concetto, secondo un approccio che a noi pare particolarmente significativo anche se non l'unico possibile. Limiteremo l'analisi ai sistemi conservativi, non toccando la descrizione del caos nei sistemi dissipativi e l'ampio campo delle applicazioni pratiche della teoria. Vogliamo infatti privilegiare una esposizione, il più possibile chiara e precisa, di come un comportamento aleatorio sia possibile in un sistema rigorosamente deterministico. Per questo, abbiamo cercato di esporre in modo semplice concetti a volte complessi, evitando di appesantire il testo con formule o dimostrazioni complicate.

Abstract. In this work we aim to show how chaos arises in dynamical systems, following the historical discoveries that have led to a precise characterization of this concept. In our opinion this approach is particularly meaningful, albeit not the sole possible. We focus our presentation on conservative systems, not touching upon the equally important topic of chaos in dissipative systems and the countless applications of the theory. In fact, our main goal is to present —as clearly as possible— how a random behavior may arise in purely deterministic systems. To this end, we tried to explain in a simple way concepts at times difficult, keeping proofs and formulae to a minimum.

(*) E-mail: giorgio.mantica@uninsubria.it

1. Introduzione

Definite i vostri termini, o altrimenti non ci comprenderemo diceva Voltaire [1], e questo è ancor più vero quando si tratta del discorso scientifico. Tuttavia, quest'ultimo deve anche servirsi di parole del linguaggio comune, ma alcune di queste portano con sé un significato che trascende l'uso tecnico che si intende adottare. Addirittura, questo significato può provenire da molto lontano nella evoluzione del pensiero ed essere profondamente radicato nell'uso anche inconscio. È questo quanto avviene per il termine *Caos*, che intendiamo definire precisamente in queste note.

Caos è forse la parola più amata dai titolisti dei giornali, i quali, quando impiegano questo termine a proposito di qualsivoglia fenomeno economico, sociale o politico, forse nemmeno sospettano di ripetere un archetipo antico di millenni: la contrapposizione tra caos e *ordine*.

Nell'antico Egitto l'ordine cosmico, il *ma'at* (termine che significa anche giustizia, diritto) assicurato in terra dal dio-re Faraone e dai riti dei sacerdoti nei templi è costantemente insidiato dal serpente-dragone Apophis che emerge dal *Nun*, il caos. Esso viene sempre sconfitto ma eternamente si ripresenta a turbare la *stabilità* del mondo. Parimenti, per i popoli mesopotamici, il dio-sole, dai semiti chiamato *Shamash* e dai sumeri *Utu*, preserva *kettu* e *mesharu*, giustizia e diritto, a volte personificati, in collaborazione con una pletora di dei maggiori e minori da far impallidire per vastità il già ben popolato Olimpo ellenico. Anche qui, tuttavia, vari miti narrano la lotta tra gli dei benigni e mostri provenienti dall'*absu* sotterraneo: la lotta tra ordine e caos [2].

Il caos è anche intimamente connesso alla cosmogonia: sia in Mesopotamia che in Egitto, esso è lo stato primordiale: liqueo, buio, indifferenziato, eterno. La collina primordiale che emerge dalle acque del caos, simbolo della creazione del cosmo, aveva come base il *ma'at*, l'ordine. Ed anche nella mitologia greca, a noi temporalmente e culturalmente più vicina, il cosmo (parola che significa ordine, armonia) nasce da un uovo deposto dal caos originale, come cantato negli Uccelli di Aristofane [3]:

La Notte, il Caos e l'Erebo fosco da prima, e v'era lo spazioso Tartaro; ma non il firmamento, ne' la Terra, ne' l'Etere. La Notte alata e nera primo depose un uovo, cui vita infuse il vento, nel grembo immensurato dell'Erebo.

Forse la vita sul nostro pianeta fu appunto portata (o perlomeno i materiali organici ad essa necessari) da un *uovo* guidato dal caos: comete ed asteroidi caduti sulla terra [4] con un moto caotico di cui descriveremo ora le caratteristiche.

2. La matematica, strumento dell'ordine e descrizione del caos

Cosmos e caos, ordine e disordine, stabilità ed instabilità sono i termini che definiscono la teoria fisico-matematica del caos. Tutto inizia ancora (per quanto la ricerca storica ci permetta di discernere) dai popoli antichi. Di fronte al caos primordiale,

generatore quanto distruttore, delle piene del Nilo i popoli egizi fecero ricorso —come ci viene insegnato fin dalla scuola elementare— alla matematica: la geometria, per ridisegnare i confini dei lotti agricoli; l'aritmetica, per gestire l'inventario dei raccolti; l'astronomia, per la compilazione dei calendari. Dobbiamo agli egizi la divisione del giorno in 24 ore, ed ai mesopotamici il sistema sessagesimale che applichiamo ad angoli, ore e minuti. Fin dall'antichità quindi l'ordine del cosmo, emergente dal caos, poteva essere compreso e gestito grazie allo straordinario mezzo della matematica. Con un balzo di secoli, giungiamo al ben noto detto di Galileo circa *la lingua* in cui è scritto *questo grandissimo libro, [...] l'Universo*, che il lettore sicuramente conosce [5]. Il meraviglioso connubio tra fisica e matematica che ne è seguito, celebrato nei Principia di Newton, ha poi portato alla spiegazione dei moti planetari in modo quasi completo, così da giustificare un'altra citazione famosa, di un fisico matematico di eccezione, Pierre Simon, marchese di Laplace, che conviene riportare per intero [6]:

Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceù du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé, serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et en Géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques, les états passés et futurs du système du monde.

È stato da molti osservato che in questa citazione risiede la definizione del determinismo scientifico, ed essa viene giustamente inquadrata nel contesto culturale in cui è stata formulata. Tuttavia, limitarla a tale ambito impedisce di coglierne il valore tutt'ora attuale. Infatti, essa enuclea *tre* componenti indispensabili per la descrizione dei fenomeni fisici. La prima, la conoscenza delle *forze* che animano la natura e cioè delle leggi che la governano. La seconda, la posizione rispettiva degli esseri che la compongono: in linguaggio moderno, le condizioni iniziali del moto. La terza, la vastità della intelligenza necessaria ad elaborare l'analisi di questi dati. Vedremo come questo terzo aspetto, che raramente viene rilevato dai commentatori, sia invece essenziale.

Dalla congiunzione di questi tre elementi deriva, per Laplace, la comprensione di tutti gli stati futuri e passati di un sistema. In un linguaggio matematico elementare, ove le leggi del sistema fossero enunciate in forma di una equazione differenziale, si tratta del cosiddetto teorema di esistenza ed unicità delle sue soluzioni. Conviene anche osservare come implicitamente Laplace assuma la reversibilità delle soluzioni di tali equazioni, per cui passato e futuro sono essenzialmente equivalenti: si veda la discussione di Antonio Coniglio in un numero recente di questa rivista [7].

Tuttavia, Laplace non si nasconde la difficoltà del compito della scienza:

Tous ces efforts dans la recherche de la vérité, tendent à le rapprocher sans cesse de l'intelligence que nous venons de concevoir, mais dont il restera toujours infiniment éloigné.

Sicuramente, lo sforzo di scoprire le leggi della fisica (il primo punto sopra citato) è fondamentale nella comprensione della natura, ma anche quando tali leggi venissero scoperte e formalizzate in linguaggio matematico coerente, la determinazione delle proprietà delle soluzioni non è per nulla banale: infatti, esse possono essere talmente complicate da potersi definire caotiche, come vedremo: è questo il regno della *dinamica*, termine greco che indica forza, e cioè forza che genera un moto.

Infine, è da sottolineare il titolo dell'opera in cui si trova la citazione riportata: *Essai philosophique sur les probabilités*, ove Laplace scrive inoltre:

On peut même dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles-mêmes, les principaux moyens de parvenir à la vérité, l'induction et l'analogie se fondent sur les probabilités.

Questa frase anticipa in un certo senso la nozione di caos deterministico. Infatti, la teoria moderna dei sistemi dinamici ha rivelato che determinismo ed aleatorietà possono non essere antitetici, ed anzi essere compresenti nel moto dei sistemi fisici.

Per comprendere questo concetto, a prima vista non intuitivo, conviene procedere per gradi, seguendone con pazienza lo sviluppo storico e logico, iniziando dall'esempio della meccanica celeste.

3. La stabilità del Sistema Solare

Il demone Apophis si risveglia nell'Europa del XIX secolo (fig. 1): la guerra franco-prussiana (dal 19 luglio 1870 al 28 gennaio del 1871) scatena una serie di sciagurati eventi di azione e reazione che porteranno alle due guerre mondiali del secolo successivo. Appena due anni dopo la guerra, Gosta Mittag-Leffler, un giovane matematico svedese, riceve una borsa di studio che include tre anni all'estero; egli visita Parigi e Berlino, dove segue le lezioni di Hermite e Weierstrass, che lo impressionano non solo per la profondità del pensiero matematico, ma anche per l'assoluta mancanza di sentimenti nazionalistici, probabilmente dovuta alla loro comune visione cattolica e, diremmo oggi, cosmopolita. Rientrato in Svezia nel 1872, Mittag-Leffler fonda la rivista *Acta Mathematica*, della quale il primo sottoscrittore è il re Oscar II di Svezia e Norvegia. Per il sessantesimo compleanno del re, nel 1885, la rivista bandisce un concorso internazionale, la cui giuria è composta, oltre che dallo stesso Mittag-Leffler, da Hermite e Weierstrass. Il bando del concorso presenta una descrizione di quattro problemi molto vasti, *dont la solution serait du plus grand intérêt pour la science*.



Fig. 1. – l’Europa nel 1870.

Il primo di questi problemi, la cui redazione è principalmente dovuta a Wierstrass, considera il moto dei pianeti: Dirichlet aveva confidato in una lettera a Kronecker di aver dimostrato che il sistema solare è stabile, e cioè che i pianeti continueranno ad orbitare intorno al Sole per un tempo infinito. La morte di Dirichlet aveva impedito che la sua dimostrazione fosse vista da alcuno, forse non fu mai nemmeno scritta in dettaglio, ed essa si era persa. Fornire una tal dimostrazione viene quindi richiesto per il concorso.

Per salvaguardare l’anonimità dei *memoirs* presentati, i concorrenti devono scegliere un motto per identificare il proprio lavoro. La frase presentata dal futuro vincitore, riportata in fig. 2, è pubblicata con i materiali originali in [8], da cui sono tratte le altre figure storiche in questo testo. Questi, che altri non è che Henri Poincaré, sceglie un motto che nei termini e nel tono richiama l’antico aspetto cosmologico del

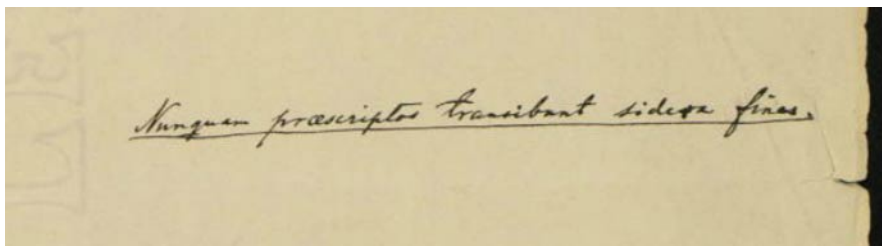


Fig. 2. – La frase scelta da Poincaré [8]. Per gentile concessione dell’Institut Mittag-Leffler.

problema: *mai gli astri potranno oltrepassare i loro confini*: stabilità, ordine, quindi. Nel caso opposto, che è interessante esplicitare, avviene invece che, senza azione di forze esterne, uno dei pianeti si allontani indefinitamente dagli altri e dal Sole.

La storia di quanto seguì è ben documentata in [9]. Poincaré considerò il cosiddetto problema ristretto dei tre corpi, in cui un terzo corpo di massa trascurabile orbita nello stesso piano in cui evolvono due pianeti massivi, ed appunto ne mostrò (o perlomeno credette di averlo fatto) la stabilità, vedendosi assegnare il premio. Per la pubblicazione del *Memoir* vincitore negli Acta Mathematica, Weierstrass e Mittag-Leffler ottennero l'aiuto di un giovane studioso, Lars Edvard Phragmen, il quale esaminò con cura il copioso manoscritto. La sua attenzione si focalizzò su un punto, notando che *se l'autore non fosse chi è non esiterei per un momento a dire che in questo punto sia incorso in un grave errore*. Poincaré riconobbe subito che l'errore evidenziato da Phragmen era ancor più grave di quanto avesse pensato (si veda anche sotto, nella sez. 7), chiese per telegramma la sospensione della pubblicazione (a sue spese) e si impegnò ad una correzione. Tutto questo avvenne ad inizio del mese di dicembre 1889. Certo quell'anno Poincaré non dovette passare delle feste natalizie inopere, poiché la revisione fu sottomessa il 5 gennaio del 1890 [10].

Essa contiene una scoperta fondamentale rispetto alla prima versione (poi distrutta), che disprova la stabilità inizialmente promessa. Poincaré svelò l'esistenza delle cosiddette *intersezioni omocline*. Poiché esse rivelano come il caos si generi nei sistemi dinamici, cercheremo ora di introdurle evitando le complicazioni tecniche della meccanica celeste. Partiremo infatti da un altro sistema importantissimo nello sviluppo della fisica: il pendolo, un paradigma di ordine, e nei prossimi tre capitoli introdurremo in tale contesto semplice i concetti sviluppati da Poincaré. Le conseguenze di questo lavoro saranno poi presentate a partire dalla sez. 7.

4. Il pendolo, paradigma di ordine

Spesso le scoperte in fisica nascono dalla osservazione dei fenomeni con occhi e paradigmi nuovi. Galileo, la cui acuità in questo senso era indubbia, arrivò a percepire il nesso tra il fenomeno della caduta libera dei gravi e il moto del lampadario nel duomo di Pisa, determinando tra l'altro l'isocronismo delle sue piccole oscillazioni, un perfetto esempio di moto ordinato. Forse per questo, osservarlo per più di qualche istante può avere su di noi un effetto soporifero.

Supponiamo ora che il braccio del pendolo sia rigido e questo possa anche compiere un giro completo attorno al suo perno. Denotando con θ l'angolo che il braccio determina con la verticale rivolta verso l'alto e scegliendo opportunamente massa e dimensione, l'equazione di Newton per il moto del pendolo diviene semplicemente

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sin(\theta).$$

Utilizzando anche la variabile $p = \frac{d\theta}{dt}$, le traiettorie del sistema si rappresentano come curve nello spazio delle fasi: $\{(\theta(t), p(t)), t \in \mathbb{R}\}$.

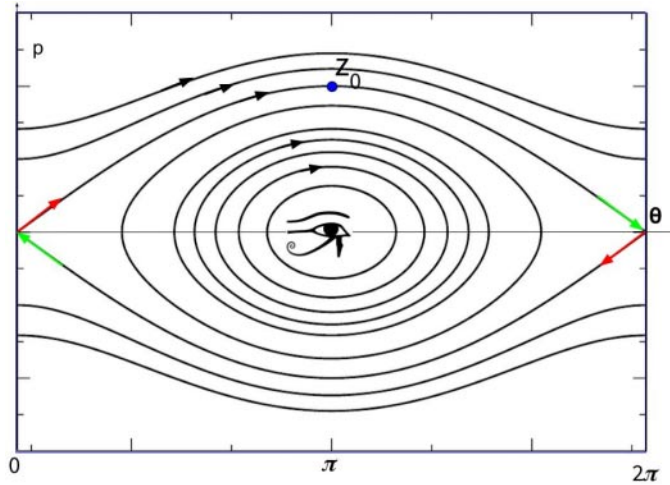


Fig. 3. – Lo spazio delle fasi del pendolo. L'occhio di Horus, dio dell'ordine, vigila la regione delle librazioni (quasi) isocrone. Le frecce verdi e rosse indicano il senso del moto verso e via dai punti fissi. Come descritto nel testo esse segnalano la connessione eteroclina tra i due punti fissi $(0,0)$ e $(2\pi,0)$, sui cui giace anche il punto $z_0 = (\pi,2)$.

Osserviamo in fig. 3 dei punti di equilibrio, per $(\theta,p) = (0,0)$, $(\pi,0)$ e $(2\pi,0)$. Il secondo è un equilibrio stabile e viene detto *ellittico* perché nel suo intorno le traiettorie disegnano delle curve simili ad ellissi. Il primo ed il terzo punto, che coincidono fisicamente (ma che per semplicità conviene a volte tenere distinti, come nelle figure qui riportate) sono invece instabili e denominati *punti iperbolici*.

Il moto del pendolo conserva l'energia meccanica $H(\theta,p) = p^2/2 + \cos\theta = K$, con K costante, per cui le traiettorie si possono facilmente descrivere e disegnare, come in fig. 3. Il valore di K discrimina, come noto, due diversi tipi di moto: per $K < 1$ il pendolo compie oscillazioni di ampiezza crescente con K , mentre per $K > 1$ il pendolo *ruota* facendo dei giri completi attorno al perno.

Tra le curve disegnate in fig. 3 consideriamo quelle definite da $K = 1$, ed in particolare il ramo superiore, per $p \geq 0$, su cui giace il punto $z_0 = (\pi,2)$ (useremo a volte il simbolo z per indicare punti nello spazio delle fasi). Questa curva è un insieme di punti molto particolare nello spazio delle fasi. Innanzitutto, essa contiene i punti di equilibrio $(0,0)$ e $(2\pi,0)$. Inoltre, presa la condizione iniziale in qualsiasi altro punto della curva, ad esempio z_0 in fig. 3, il moto che ne origina *non* percorre *tutta* la curva in un tempo finito. Infatti, solo quando il tempo t tende all'infinito il moto tende al punto fisso $(\theta,p) = (2\pi,0)$, mentre per $t \rightarrow -\infty$ esso si dirige al punto fisso $(0,0)$. La curva così disegnata viene detta *connessione eteroclina* poiché congiunge due punti fissi, (*omoclina* ove questi fossero considerati come coincidenti).

Questa curva ha una ulteriore interpretazione dinamica, che sarà di importanza fondamentale nel seguito: essa fa parte della *varietà stabile* del punto fisso $(0,2\pi)$. Per varietà si può qui intendere una curva liscia. Si definisce quindi varietà stabile di un punto fisso l'insieme delle condizioni iniziali del moto la cui traiettoria tende a

tale punto fisso, quando il tempo tende all'infinito, come indicato in figura dal verso della freccia verde. La definizione di *varietà instabile* è totalmente analoga, prendendo però il limite temporale per *meno* infinito: in modo un po' impreciso, ma intuitivo, possiamo dire che essa è l'insieme dei punti che originano da un punto fisso al tempo meno infinito.

In conclusione, il ramo superiore della curva $K = 1$ (per $p \geq 0$) fa parte della varietà stabile di $(2\pi, 0)$ e della varietà instabile di $(0, 0)$ e queste due varietà coincidono; per il ramo inferiore la situazione è specularmente simmetrica.

Una situazione topologicamente simile, e cioè l'esistenza di una connessione omoclinica liscia (in cui il ruolo dei punti fissi era giocato da traiettorie periodiche) era attesa da Poincaré nella sua trattazione del sistema ristretto dei tre corpi, ed essa sarebbe stata cruciale per provarne la stabilità. Ciò non si rivelò però essere il caso, per un fenomeno che illustreremo ora, sempre nel nostro sistema modello.

5. La mappa di Eulero del pendolo

La ragione per cui nel caso del pendolo si trova una connessione eteroclinica liscia deriva dalla natura bidimensionale delle equazioni differenziali del moto. In un numero maggiore di dimensioni questo fatto diviene eccezionale, poiché le traiettorie hanno maggior libertà di movimento. Ciò si può vedere considerando una integrazione numerica delle equazioni differenziali del pendolo, che lo rende di fatto un sistema tridimensionale.

Il metodo di Eulero è la tecnica più semplice per questo scopo: consiste nel valutare la derivata temporale di una variabile dinamica al tempo iniziale di un intervallo finito (ancorché piccolo, di lunghezza τ) e nel ritenerla costante in tale intervallo. Così facendo, integriamo dapprima l'equazione $\frac{dp}{dt} = \sin(\theta)$, a partire dal tempo t_0 per un intervallo τ . Otteniamo $p(t_0 + \tau) = p(t_0) + \tau \sin(\theta(t_0))$. Allo stesso modo, ricaviamo la relazione tra $\theta(t_0)$ e $\theta(t_0 + \tau)$ applicando Eulero *a ritroso*, dal tempo $t_0 + \tau$ al tempo t_0 , alla equazione $\frac{d\theta}{dt} = p$, e cioè $\theta(t_0) = \theta(t_0 + \tau) - \tau p(t_0 + \tau)$. Il perché di questa scelta sarà chiaro tra breve.

In questo modo, il moto generato nello spazio delle fasi da un *flusso continuo* si trasforma in un moto discreto generato da una *mappa* invertibile, Φ , ricavata dalle precedenti equazioni: $(\theta(n\tau + t_0), p(n\tau + t_0)) = \Phi^n(\theta(t_0), p(t_0))$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Denotando con il pedice n il valore della variabili dinamiche al tempo $n\tau + t_0$ otteniamo esplicitamente la mappa Φ

$$(2) \quad \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \tau p_{n+1} = \theta_n + \tau p_n + \tau^2 \sin(\theta_n), \\ p_{n+1} = p_n + \tau \sin(\theta_n). \end{cases}$$

È importante notare che questo moto discreto bidimensionale può corrispondere ad un moto continuo in uno spazio a *tre* dimensioni: si può infatti vedere la trasformazione Φ come una mappa *stroboscopica* che determina le posizioni (θ, p) osservate

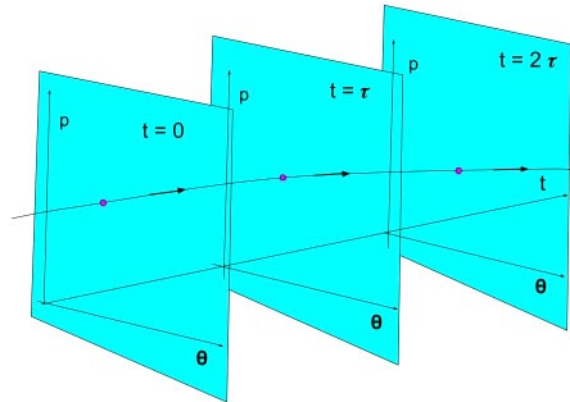


Fig. 4. – La mappa Φ può essere pensata come una osservazione stroboscopica di un moto in uno spazio tridimensionale. Ad ogni istante di tempo è assegnato un piano (θ, p) , che viene “bucato” dalle traiettorie del sistema. Considerando piani spaziatamente di una quantità fissa τ ed osservando solamente le posizioni successive dei “buchi” (punti fucsia nella figura), queste sono generate dalla mappa Φ .

solo ad istanti spaziatamente di τ , mentre le traiettorie del sistema evolvono in uno spazio a tre dimensioni, come in fig. 4. Per questa ragione il sistema dinamico dato dalla mappa Φ è da ritenersi un esempio paradigmatico di una *classe* di sistemi dinamici *più generale* di quella del pendolo, e per questo più interessante. Inoltre, poiché la mappa di Eulero Φ è solo una approssimazione del moto del pendolo ideale (ed infatti il valore dell’energia meccanica non è conservato), si può altresì pensare che essa rappresenti il moto di un pendolo reale soggetto a *perturbazioni esterne*, come discuteremo più avanti.

6. Le varietà stabile ed instabile e le loro intersezioni

Analizziamo quindi il moto ottenuto iterando la mappa Φ . I punti fissi, che verificano $(\theta, p) = \Phi(\theta, p)$, sono gli stessi della equazione differenziale. La dinamica vicino ad essi si può studiare tramite la linearizzazione della funzione Φ . Per piccoli valori di δ_θ, δ_p otteniamo

$$\Phi(\theta + \delta_\theta, p + \delta_p) \simeq \Phi(\theta, p) + d\Phi \begin{pmatrix} \delta_\theta \\ \delta_p \end{pmatrix},$$

in cui il differenziale $d\Phi$ è la matrice

$$d\Phi(\theta, p) = \begin{bmatrix} 1 + \tau^2 \cos(\theta) & \tau \\ \tau \cos(\theta) & 1 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che il determinante di $d\Phi$ è unitario in tutto lo spazio delle fasi (θ, p) , grazie alla scelta sopra descritta di invertire la seconda trasformazione di Eulero e quindi la trasformazione Φ preserva le aree.

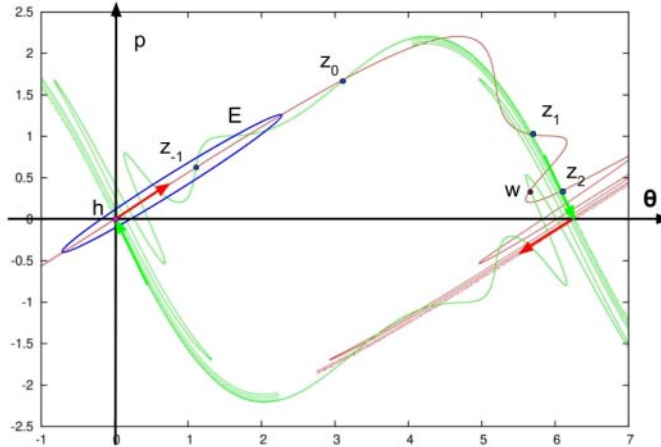


Fig. 5. – Varietà instabile (in rosso) e stabile (in verde) dei punti fisso iperbolici $(0,0)$ e $(0,2\pi)$. Si notino le loro intersezioni trasverse z_n (punti blu) ed il reticolo omoclino vicino al punto $(0,2\pi)$, cui appartiene il punto w (blu). L'ellisse E (blu) che comprende il punto iperbolico h (fucsia) e l'intersezione trasversa z_{-1} (blu) serve alla costruzione presentata nella sez. 7. Per chiarezza solo parte delle varietà è stata disegnata. Altri dettagli sono descritti nel testo.

Specializzando il calcolo al punto fisso $(0,0)$ si nota che per $\tau > 0$ il differenziale $d\Phi(0,0) = \begin{bmatrix} 1+\tau^2 & \tau \\ \tau & 1 \end{bmatrix}$ ha due autovalori reali e positivi, $\lambda_+ = 1 + \frac{\tau^2}{2}(1 + \sqrt{\tau^2 + 4}) > 1 > \lambda_- = 1/\lambda_+$, cui corrispondono due autospazi Λ_+ e Λ_- . Pertanto, nella approssimazione lineare, il moto di un punto in Λ_- converge esponenzialmente al punto fisso $(0,0)$ per tempi crescenti (ad ogni iterazione la sua distanza da esso viene moltiplicata per λ_-), mentre quello di un punto in Λ_+ se ne distanzia esponenzialmente. Questi autospazi vengono definiti il *sottospazio stabile* ed *instabile*, rispettivamente, del punto fisso iperbolico. Le frecce verdi e rosse in fig. 5 indicano la direzione di questi sottospazi ed il verso del moto linearizzato su di essi.

È ovvio che il moto linearizzato è solo una approssimazione del moto esatto della mappa Φ . Tuttavia, il cosiddetto *teorema della varietà locale* garantisce che esistono in un intorno del punto fisso due varietà differenziali locali M_{\mp}^{loc} (stabile ed instabile, rispettivamente) invarianti per il moto, che consistono in curve lisce tangenti in $(0,0)$ ai sottospazi Λ_{\mp} , tali che se $(\theta, p) \in M_{\mp}^{\text{loc}}$ allora $\Phi^n(\theta, p)$ tende al punto fisso, quando n tende a $\pm\infty$, rispettivamente. Il teorema è sempre dovuto al buon Henri ed è ben descritto nelle lezioni di Stephen Smale [11], ove il lettore matematicamente inclinato può trovare rigorosamente espressi e sviluppati tutti i concetti qui utilizzati.

Queste varietà locali sono l'esatto analogo di quelle osservate nel moto del pendolo semplice nel paragrafo precedente, con la differenza *sostanziale* che queste curve *non* sono più traiettorie del moto, ma più generalmente *insiemi invarianti*: se un punto vi appartiene, le sue iterate non possono uscirvi.

Quando τ tende a zero, gli autovalori λ_{\pm} tendono a ± 1 e *localmente* in un intorno di $(0,0)$, le varietà M_{\mp}^{loc} tendono al grafico delle curve $p(\theta) = \pm\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$ descritte nel paragrafo precedente. La situazione è ovviamente identica nel punto $(2\pi,0)$.

Sottolineiamo che le implicazioni del teorema citato sono *locali* e cioè valgono solo in un intorno del punto fisso. Tuttavia, le varietà locali si estendono a *globali* andando avanti ed indietro nel tempo: ad esempio, preso un punto z in $M_+^{\text{loc}}(0,0)$, le sue immagini $\Phi^n(z)$, con n positivo, appartengono $M_+(0,0)$, la varietà instabile globale di $(0,0)$. Riportando in fig. 5 un vasto insieme di punti in $M_+^{\text{loc}}(0,0)$ e le loro iterazioni, la varietà globale $M_+(0,0)$ appare come una curva liscia, rappresentata in rosso. Allo stesso modo, con la consueta inversione del segno del tempo, si è disegnata in verde la varietà stabile globale $M_-(2\pi,0)$.

Siamo arrivati così alla soglia della scoperta fondamentale di Poincaré: andiamo ora alla ricerca delle *intersezioni* di queste varietà, e cioè di condizioni iniziali che iterate in avanti ed indietro nel tempo convergono ai due punti fissi. Consideriamo infatti in parallelo le figg. 3 e 5. Seguiamo la curva indicata dalla freccia rossa, che esce dal punto fisso $(0,0)$, per valori crescenti di θ . Essa è la varietà instabile $M_+(0,0)$. Dall'altro lato, seguiamo, per valori decrescenti di θ , la curva $M_-(2\pi,0)$, indicata dalla freccia verde che entra nel punto fisso $(2\pi,0)$. Nel caso del pendolo, fig. 3, le due curve coincidono! Si può anche dire che esse si incontrano nel punto $z_0 = (\pi, 2)$ con angolo nullo. Viceversa, nella mappa di Eulero del pendolo, fig. 5, le curve, ora colorate di rosso e di verde, si intersecano ancora in un punto z_0 di ascissa $\theta = \pi$, ma l'intersezione è *trasversa*, con angolo diverso da zero! È come se le due varietà siano le due metà di un tunnel ferroviario scavato a partire dagli opposti versanti di un massiccio alpino: è chiaramente opportuno per una ferrovia che i binari si incontrino, e che lo facciano con angolo nullo, come può apprezzare chi abbia avuto la fortuna di viaggiare col manovratore attraversando il tunnel di base del Lötschberg alla velocità di 180 km/h.

7. Le intersezioni omo-eterocline trasverse, radice del caos

La discretizzazione della dinamica ha portato ad una caratteristica qualitativamente diversa delle varietà stabili ed instabili. Quali sono quindi le conseguenze della esistenza di una intersezione trasversa? Drammatiche. Non solo per l'ipotetico tunnel ferroviario, ma per lo stesso Poincaré. Infatti, questo fatto non solo comportava un errore nel suo manoscritto, ma faceva rovinosamente cadere la prova della stabilità del sistema dei tre corpi. In fig. 6 riportiamo la lettera da lui inviata a Mittag-Leffler in quel fatidico primo dicembre 1889 che possiamo così leggere nella sua interezza. Vediamo come egli non celi lo sconforto in cui tale scoperta l'aveva gettato: *je ne vous dissimulerai pas le chagrin que me cause cette découverte*, e persino chieda a Mittag-Leffler se egli ritenga ancora che il resto delle sue conclusioni meritino ancora l'alta ricompensa che gli era stata accordata.

Nella stessa lettera, Poincaré nota alcune conseguenze di tale scoperta, che possiamo illustrare, sempre a partire dal nostro esempio e dalla fig. 5. La prima ovvia conseguenza è che $M_+(0,0)$ non coincide con $M_-(2\pi,0)$, e vi siano anzi *infinite* intersezioni trasverse tra le due varietà. Questo fatto è dimostrabile semplicemente.

Mon cher ami,

J'ai écrit ce matin à M. Poincaré pour lui parler d'une erreur que j'avais commise et il m'a sans doute communiqué ma lettre. Mais les conséquences de cette erreur sont plus graves que je ne l'avais cru d'abord. Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques soient fermées, au moins dans le sens où je l'entendais d'abord. Ce qui est vrai, c'est que la ~~on~~ considère les deux parties de cette surface (que je voyais bien encore accouplées l'une à l'autre) et compare avant une infinité de courbes trajectoires asymptotiques. #

J'avais cru que très des courbes asymptotiques après être éloignées, d'une courbe fermée représentaient une solution périodique, de reproduisant ensuite asymptotiquement de la même courbe fermée. Ce qui est vrai, c'est qu'il y en a une infinité qui jouissent de cette propriété.

Je ne vous dirai jamais par le diagramme que me cause cette découverte. Je ne sais d'abord en quoi je suis en core que les, si on le dit, qui subsistent, et avois l'existence des solutions périodiques, celle des solutions asymptotiques, la théorie des exposants caractéristiques, la non-existence des intégrales uniformes et la divergence des séries de Lindberg, même en core la haute résonance que vous avez bien voulu leur accorder.

D'autre part, de grands arrangements vont devenir nécessaires et je ne sais si on n'a pas commencé à lire le raisonnement télégraphique à M. Poincaré.

En tout cas je ne puis mieux faire que de confesser mes perplexités à un ami aussi digne que vous l'avez toujours été.

Je vous en dirai plus long quand j'aurai un peu plus clair dans mes affaires.

Veillez agréer, mon cher ami, avec nos très sincères excuses, l'assurance de mon entier dévouement,

Lorenz

Fig. 6. – La lettera di Poincaré a Mittag-Leffler del primo dicembre 1889 [8]. Per gentile concessione di Institut Mittag-Leffler.

Infatti se z_0 appartiene ad entrambe le varietà, essendo queste invarianti, vi appartengono anche i punti $z_n = \Phi^n(z_0)$, per ogni intero n . Essi tendono al punto fisso $(0, 0)$ quando n tende a meno infinito, ed a $(2\pi, 0)$ nel limite opposto. Inoltre, poichè in z_0 le varietà si intersecano con un angolo non nullo, così avviene in ogni z_n , poichè la matrice $d\Phi$ mappa i vettori tangenti a queste varietà da una intersezione z_n alla successiva e, come visto nella sez. 6, $d\Phi$ è non singolare. In fig. 5 sono evidenziate alcune di queste intersezioni.

Quello che colpiva in modo particolare Poincaré è però un altro fatto: consideriamo sempre la fig. 5. Quando n cresce, i punti z_n si avvicinano a $(2\pi, 0)$. La curva rossa $M_+(0, 0)$ passa per ogni z_n ed anche per $(2\pi, 0)$, poichè quest'ultimo è equivalente a $(0, 0)$. Essa non può intersecare se stessa, e diventa quindi sempre più parallela alla direzione del sottospazio Λ_+ (la freccia rossa) ed a se stessa. Lo stesso comportamento si può osservare per $M_-(0, 0)$ e questo determina una serie di nuove intersezioni (come ad esempio il punto denominato w) che costituiscono il cosiddetto *reticolo omoclinico*, che Poincaré diceva di non osare nemmeno disegnare, e che noi vediamo formarsi in questa figura, ove per chiarezza, solo la parte iniziale delle varietà stabile ed instabile è stata disegnata.

Il lettore che ci ha pazientemente seguito nella costruzione di questi oggetti può ora giustamente chiedersi per quale ragione sosteniamo che scoprendo le intersezioni

omo-eterocline trasverse Poincaré abbia trovato la radice del caos nei sistemi dinamici. Ora, le intersezioni trasverse, il reticolo omoclino ed anche i punti iperbolici, sono casi particolari di *insiemi iperbolici* che influenzano le traiettorie che vi si avvicinano in modo estremamente sensibile rispetto alla condizione iniziale, e il moto che ne risulta è caotico, come vedremo in dettaglio nei capitoli successivi. Iniziamo qui ad illustrare questo fatto tramite due risultati sorprendenti: il *Lemma dell'orbita ombra* di Anosov e Bowen [12, 13] ed il *controllo del caos* di Ott, Grebogi e Yorke [14].

Come detto, il moto è dato dalla applicazione della mappa Φ , e i punti nelle traiettorie si succedono seguendo la regola *deterministica* $z_{n+1} = \Phi(z_n)$. Supponiamo che, partendo da un punto z , invece di portarci in $\Phi(z)$ il moto ci conduca in z' , un punto arbitrariamente scelto con il solo vincolo che la sua distanza da $\Phi(z)$ sia minore di una quantità positiva fissata δ . Ora, una successione $\{\tilde{z}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ove questa proprietà vale per ogni n , e cioè per cui

$$\text{dist}(\tilde{z}_{n+1}, \Phi(\tilde{z}_n)) < \delta$$

per ogni intero n , si dice δ -pseudo orbita. Si noti che questa definizione è radicalmente differente dal dire che una pseudo-orbita sia una orbita *vera* in cui ogni punto è stato leggermente mosso. Si possono immaginare varie situazioni che danno luogo ad una pseudo-orbita: perturbazioni *aleatorie* di un moto reale, errori numerici nel calcolo di un moto simulato, ma anche un nostro intervento che decida di alterare il moto per propri scopi, come ad esempio costruire “a mano” una pseudo-orbita periodica.

Ora, il Lemma dell'orbita ombra stabilisce che, per ogni ε positivo fissato esiste $\delta > 0$ in modo che per *qualsiasi* δ -pseudo orbita $\{\tilde{z}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ che non si allontani più di δ da un insieme iperbolico, esiste una orbita *vera* del sistema dinamico: $\{z_n = \Phi^n(z_0), n \in \mathbb{Z}\}$, la quale si trova sempre a distanza minore di ε dalla precedente pseudo-orbita. Questa orbita vera è detta *ombra*, forse in riferimento ai pedinamenti tra spie: la pseudo-orbita cerca di evadere il controllo del sistema dinamico facendo degli scarti da $\Phi(\tilde{z}_n)$ a \tilde{z}_{n+1} che rompono la causalità imposta dalla legge del moto, ma il sistema dinamico è così *ricco* (e questa ricchezza è una delle caratteristiche del caos che illustreremo) da avere un *agente* che la pedina *per sempre*: $\text{dist}(\tilde{z}_n, z_n) < \varepsilon$ per ogni n intero, da meno a più infinito!

Fuor di metafora, una pseudo-orbita è una successione di punti che *approssimativamente* rispetta la dinamica, ma, a parte questo, può comportarsi in modo eclettico: ad esempio, può restare per un numero finito di iterazioni su un punto fisso, e poi partirsene, oppure avere un ciclo periodico, e poi allontanarsene per adagiarsi in un differente ciclo, e ciò anche *ad infinitum*. Il Lemma appena citato dice che è possibile determinare opportunamente la condizione iniziale z_0 per produrre una orbita *vera* del sistema dinamico molto prossima a tali bizzarri comportamenti. La dimostrazione del Lemma mostra altresì che la determinazione di tale condizione iniziale deve essere estremamente precisa.

Dal Lemma precedente si intuisce come piccoli aggiustamenti, ad istanti successivi, della posizione di un sistema possano essere utilizzati per dirigere opportunamente

il moto [15]. Un passo ulteriore in questa analisi è stato compiuto da Ott, Grebogi e Yorke [14]. Gli autori citati hanno introdotto una tecnica costruttiva esplicita per questo scopo, che utilizza *piccole perturbazioni* su *parametri accessibili* del sistema. La teoria, denominata significativamente *controllo del caos*, è evidentemente di grande interesse pratico ed è stata utilizzata con successo in vari sistemi fisici, sia in laboratorio che nelle applicazioni.

8. Il ferro di cavallo e la dinamica simbolica

Il fenomeno delle intersezioni omo-eterocline trasverse illustrato nel paragrafo precedente è tipico nei sistemi dinamici non lineari multidimensionali. Come visto, esso implica la formazione di insiemi iperbolici nello spazio delle fasi, presso i quali il moto presenta fenomeni quali il Lemma dell'orbita ombra. In sostanza, questo fenomeno genera il caos, come vogliamo ora illustrare e definire precisamente utilizzando la costruzione nota come *ferro di cavallo*, di Steve Smale.

Essa si basa su una descrizione *simbolica* del moto. In luogo delle posizioni z nello spazio delle fasi, questa descrizione utilizza successioni di *cifre* prese da un alfabeto finito (ad esempio, le due cifre zero ed uno). In essenza, un punto z nello spazio delle fasi viene unicamente identificato da una sequenza bi-infinita di cifre: $\sigma = (\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ che corrisponde alla sua evoluzione dinamica. Infatti, quando in un intervallo di tempo unitario il sistema si muove dal punto z in z' , a quest'ultimo corrisponde una nuova sequenza σ' , ottenuta dalla precedente sequenza infinita σ , facendola scorrere di una posizione (per cui $\sigma'_0 = \sigma_1$, $\sigma'_1 = \sigma_2$, etc.). La *storia* infinita del moto che origina nel punto z è quindi scritta in questa sorta di *rotolo del destino*, che il tempo muove di un simbolo alla volta. L'importanza di questa equivalenza tra moto reale e moto simbolico risiede nel fatto che essa ci permetterà di definire il caos in modo preciso ed al contempo astratto, nella sez. 11.

Ma come si genera un *ferro di cavallo* a partire dalle intersezioni omo-eterocline, ovvero, come si arriva alla descrizione simbolica del moto? Per illustrarlo, ci rifacciamo all'ormai consueto esempio del pendolo *à la* Eulero. Questo richiede una analisi tecnica ed un po' complessa, che può essere omessa in prima lettura e che svolgiamo ora, pur sempre in modo sintetico, per il lettore interessato.

Focalizziamo l'attenzione in fig. 5 sul ramo di varietà instabile (rosso) che va dal punto iperbolico $h = (0, 0)$ alla intersezione eteroclina z_{-1} e studiamo le traiettorie che orbitano vicino a questi due punti. Più precisamente, consideriamo l'ellisse E (intesa come bordo ed interno) che comprende il punto fisso iperbolico e si estende lungo la varietà instabile (rossa) fino a includere z_{-1} . Per migliore chiarezza, schematizziamo questa situazione in fig. 7, dilatando le proporzioni e proiettando su un piano il moto che, in realtà, si svolge sulla superficie laterale di un cilindro, quale infatti è lo spazio delle fasi: $z = (\theta, p)$, con θ variabile periodica in $[0, 2\pi]$ e $p \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo ora le traiettorie che, partendo dalla ellisse E , in questa ritornano, dopo un certo numero positivo di iterazioni k . Ciò definisce l'intersezione di E con gli insiemi $\Phi^{-k}(E)$, ottenuti iterando E indietro nel tempo: quindi tali insiemi si

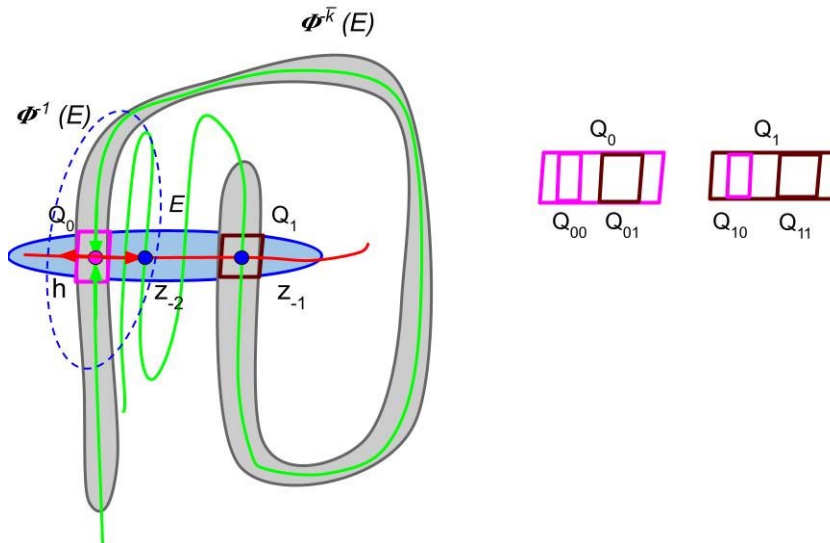


Fig. 7. – Rappresentazione schematica del ferro di cavallo, con l’ellisse E (blu), il punto iperbolico h (fucsia), le intersezioni trasverse z_{-1} e z_{-2} (blu) e le varietà stabile (verde) ed instabile (rosso). La prima controimmagine dell’ellisse, $\Phi^{-1}(E)$ è tratteggiata in blu, la k -esima è disegnata in grigio: le sue intersezioni con E producono i quadrilateri Q_0 (rosa) e Q_1 (marrone). Nel lato destro, si illustra come a loro volta Q_0 e Q_1 contengano i quadrilateri Q_{00} , Q_{01} , Q_{10} e Q_{11} . Per comprendere come si passi dalla fig. 5 a questa, si noti che per la topologia dello spazio delle fasi $\Phi^{-k}(E)$ (grigio) si arrotola sulla superficie laterale di un cilindro.

stringono nella direzione della varietà instabile e si *allungano* seguendo la direzione della varietà stabile (verde), come si vede già dalla prima iterazione, disegnata in figura in tratteggio blu. L’allungamento progressivo lungo la varietà stabile porta ad un valore di k , che indichiamo con \bar{k} , per cui $\Phi^{-\bar{k}}(E)$ (insieme disegnato in grigio, che somiglia vagamente ad una serpe) interseca l’ellisse di partenza E in due quadrilateri distinti, come in figura. Questa è la conformazione che Smale definisce *ferro di cavallo*.

Consideriamo ora la dinamica data da $\Psi = \Phi^{\bar{k}}$, ove \bar{k} è l’intero appena determinato, osservando quindi il moto ogni \bar{k} iterazioni della mappa Φ . Introduciamo a questo scopo un nuovo indice m , in modo che ad $m = 1$ corrispondono \bar{k} iterazioni di Φ , ad $m = 2$, $2\bar{k}$ iterazioni e così via. Seguendo Smale, definiamo un insieme che indichiamo con H , dato dai punti z di E la cui traiettoria $\Psi^m(z)$ appartiene ad E per ogni valore di m , positivo o negativo.

Lo studio per $m = 1$ è stato appena svolto: esso definisce l’insieme $H_1 = E \cap \Psi^{-1}(E)$, che ovviamente include H e consiste nei due quadrilateri Q_0 e Q_1 disegnati in figura. Il punto fisso iperbolico h appartiene a Q_0 , mentre l’intersezione trasversa z_{-1} appartiene a Q_1 . Passando ad $m = 2$ dobbiamo studiare $H_2 = E \cap \Psi^{-1}(E) \cap \Psi^{-2}(E)$, cioè i punti di E la cui traiettoria rimane in E per due iterazioni future. Notiamo che si può scrivere $H_2 = E \cap \Psi^{-1}(H_1)$: il secondo termine di questa intersezione ci chiede di iterare con Ψ^{-1} i due quadrilateri Q_0 e Q_1 . Immaginiamo quindi di dipingere questi due quadrilateri in rosa e marrone: la trasformazione geometrica

che porta da E a $\Psi^{-1}(E)$ fa sì che queste *strisce* si dipingano longitudinalmente su quest'ultimo insieme, parallelamente alla varietà stabile (per non appesantire la figura le strisce sono lasciate all'immaginazione del lettore). Si vede quindi che H_2 consiste di *quattro* nuovi quadrilateri, due all'interno di Q_0 due all'interno di Q_1 , che si possono indicare con $Q_{00}, Q_{01}, Q_{10}, Q_{11}$, come in fig. 7. In generale, alla m -esima iterazione, $H_m = E \cap \Psi^{-1}(E) \cap \dots \cap \Psi^{-m}(E)$ consiste nell'unione di 2^m quadrilateri disgiunti. Numerando questi quadrilateri da sinistra a destra, in base 2, essi si possono quindi indicare con Q_σ , dove σ è una sequenza ordinata di m cifre binarie.

È ora cruciale notare che la sequenza σ appena descritta rappresenta anche la *storia* simbolica dei punti in ciascun Q_σ : scrivendo $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1})$ si ottiene che se un punto z appartiene a Q_σ , al tempo j la sua iterata $\Psi^j(z)$ appartiene a Q_{σ_j} . In altre parole, se $\sigma_j = 0$, l'iterata j -esima di z (tramite $\Psi = \Phi^k$, si ricordi!) si trova nel quadrilatero Q_0 , vicino al punto fisso; altrimenti, se $\sigma_j = 1$, in Q_1 , vicino all'intersezione trasversa.

Rimane però da considerare cosa succede nel limite quando m tende all'infinito. Osserviamo sempre in fig. 7, lato destro, come si passi dall'ellisse E ad i due quadrilateri inclusi in essa, e come ciascuno di essi venga *tagliato* in modo analogo all'iterazione successiva. Il lettore attento avrà sicuramente notato che questa procedura porta alla generazione di un oggetto *frattale*: i quadrilateri Q_σ diventano un insieme di *fili* verticali in $Q_0 \cup Q_1$ che, tagliati orizzontalmente dalla varietà instabile, danno luogo ad un insieme di Cantor: compatto, perfetto (ogni suo punto è punto di accumulazione dell'insieme) con interno vuoto, come ad esempio il famoso insieme ternario di Cantor.

Grazie alla invertibilità della dinamica, gli stessi ragionamenti si possono applicare studiando l'insieme dei punti di E la cui traiettoria in ogni istante *passato* si è trovata in E . Si ottiene un insieme di fili, questa volta approssimativamente paralleli alla varietà instabile (e quindi orizzontali in figura), che intersecano i quadrilateri Q_0 e Q_1 . L'intersezione dei fili verticali ed orizzontali è quindi non vuota: anch'essa è un insieme di Cantor H in E , che in più è invariante per la dinamica ed *iperbolico*.

Ciascuno dei fili orizzontali è codificato da una seconda sequenza simbolica infinita, che rappresenta il passato della traiettoria. La storia simbolica totale di una traiettoria di un punto di H è quindi scritta in una sequenza bi-infinita di zeri ed uni, come annunciato all'inizio di questa sezione. Il moto dato da Ψ su H corrisponde a *far scorrere* di un passo questa sequenza dal futuro verso il passato. Tutte le sequenze infinite di simboli sono realizzate dalla dinamica e questo rende l'equivalenza tra il moto deterministico caotico ed un processo stocastico: non è possibile stabilire se a generare le sequenze σ sia una regola dinamica o il lancio di una moneta!

È dovuto sempre a Steve Smale un teorema che garantisce che ferri di cavallo si possano sempre trovare in sistemi dinamici differenziabili con continuità, in cui si abbia una intersezione trasversa, l'incubo di Poincaré. Questi sistemi deterministici sono quindi popolati da insiemi invarianti iperbolici, come l'insieme H appena descritto, su cui il moto è di una complessità inestricabile. Torneremo più avanti sulla dinamica simbolica; dobbiamo ora descrivere il contraltare dei comportamenti instabili fin qui

descritti. Infatti, dobbiamo ora chiederci cosa avviene nelle zone dello spazio delle fasi distanti da insiemi iperbolici.

9. Il teorema KAM e la stabilità del moto

Il *Memoir* di Poincaré utilizzava tecniche non solamente topologiche, ma anche analitiche, basate sullo sviluppo in serie delle soluzioni delle equazioni moto. Astronomi e meccanici avevano sviluppato una *teoria perturbativa* per descrivere il moto di sistemi *perturbati*, a partire da quello di sistemi *integrabili*, che nel campo Hamiltoniano corrispondono a sistemi in cui esiste un numero di costanti del moto analitiche in involuzione uguale al numero di gradi di libertà [16].

Weierstrass era molto interessato, come detto, a verificare la osservazione di Dirichlet circa la convergenza di tali serie nel problema planetario. Il punto cruciale risiedeva nel fatto che i loro coefficienti coinvolgono al denominatore le combinazioni lineari, a coefficienti interi, delle frequenze imperturbate. Queste combinazioni possono essere arbitrariamente vicine allo zero o addirittura annullarsi se il rapporto tra le frequenze è razionale. Ci si trova quindi di fronte al famoso problema dei *piccoli denominatori* che ha turbato le notti degli astronomi e a causa del quale le serie perturbative divergono e sono solamente asintotiche. Nel caso del sistema planetario, il sistema integrabile consiste nel trascurare l'interazione gravitazionale tra i pianeti, e le frequenze imperturbate sono quindi quelle del loro moto orbitale attorno al Sole. Ad esempio il rapporto tra le frequenze di Giove e Saturno è vicinissimo al numero razionale $5/2$.

La pietra miliare per la soluzione di questo problema fu posta da Kolmogorov nel 1954 e successivamente raffinata da Arnol'd e Moser, da cui il termine di *Teorema KAM* [17]. Questa tecnica permette di accelerare la convergenza di tali serie e di provare l'esistenza di moti quasi periodici per opportune condizioni iniziali nello spazio delle fasi e piccoli valori della perturbazione. In questo modo Arnol'd [18] ha mostrato che se eccentricità, masse e inclinazioni dei pianeti sono sufficientemente piccole, esiste un insieme di misura positiva di condizioni iniziali per cui il moto è quasi periodico.

Il modello del pendolo integrato *à la* Eulero permette di capire e visualizzare i fenomeni descritti dal teorema KAM. Infatti, notiamo che, con un riscaldamento di coordinate con cui si introduce l'azione $I = \tau p$, la mappa Φ nella equazione (2) prende la forma della famosa *standard map* di Chirikov-Taylor [19]

$$(3) \quad \begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \\ I_{n+1} = I_n + \kappa \sin(\theta_n). \end{cases}$$

La mappa (3) descrive localmente una gran varietà di sistemi fisici. Essa è il modello paradigmatico per la descrizione di un generico sistema non lineare così come l'oscillatore armonico lo è per i sistemi lineari.

Nella equazione (3), $\kappa = \tau^2$ è il parametro intensità di perturbazione: infatti, per $\kappa = 0$ il moto è integrabile, con costante del moto l'azione I , le cui curve di livello,

le linee $I(\theta) = \bar{I}$, *fogliano* completamente lo spazio delle fasi. Esse sono definite *tori invarianti*. Su ciascuna di esse il moto è semplicemente dato dalla rotazione di θ a frequenza $\omega = \bar{I}/(2\pi)$.

Quando il parametro κ è non nullo, il teorema KAM prevede che alcuni tori invarianti, con frequenza fortemente irrazionale (diofantina), continuino ad esistere, ancorché deformati, ma tuttavia con la stessa topologia del toro imperturbato, diventando curve della forma $I = h(\theta)$, ove h è una funzione periodica. La parte di spazio delle fasi racchiusa tra due di queste curve è invariante e quindi il moto al suo interno è stabile: sono queste curve i *limina* invalicabili del motto di Poincaré.

Tuttavia, questa situazione cambia gradualmente al variare del parametro κ . Man mano che κ cresce sempre più tori vengono distrutti dalla perturbazione. Ad un valore critico $\kappa = \kappa_c \simeq 0.971635406$ anche l'ultimo toro invariante viene meno ed un *pianeta* può fuggire all'infinito. Come congetturato da John Greene [20], la frequenza di questo toro corrisponde al valore della media aurea, $\omega = (\sqrt{5}-1)/2$. Anche i tori associati ad altre frequenze irrazionali *nobili* (quali ad esempio la media argentea, bronzea, etc., secondo la nomenclatura introdotta da Ian Percival, basata sulla scrittura in frazione continua della frequenza ω) appaiono particolarmente resistenti [21].

Cosa avviene invece ai tori con frequenza razionale, $\omega = p/q$, con p e q interi relativamente primi? Un teorema, di Poincaré-Birkhoff, stabilisce che della infinità di traiettorie periodiche che li popolano, solo un numero pari sopravvive alla perturbazione. Nella mappa standard questo numero è due e quindi vi sono $2q$ punti periodici, che sono punti fissi della mappa iterata q volte. A questa mappa si può applicare la teoria precedentemente descritta, con il risultato che metà di questi punti sono ellittici e l'altra metà iperbolici, con le loro rispettive varietà stabili ed instabili, che si intersecano trasversalmente. In questo modo si genera uno *spazio delle fasi misto*, con zone caotiche ed *isole* di stabilità le une dentro le altre, in sequenza infinita, dando origine a una struttura frattale [22]. Il grafico in fig. 8 è stato ottenuto da Jim Meiss [23] usando un software di visualizzazione da lui sviluppato che il lettore può facilmente scaricare [24,25] ed utilizzare per studiare i comportamenti fin qui descritti.

Quanto si osserva nel caso della mappa standard (3) è tipico di un qualunque sistema dinamico non lineare: il suo spazio delle fasi presenta una intricata struttura di zone con comportamento ordinato del moto, intrecciate a zone di comportamento caotico. Man mano che l'ampiezza dei termini non lineari aumenta (ad esempio quando aumenta l'energia del sistema o la forza delle interazioni), le zone caotiche si espandono fino ad occupare tutto lo spazio delle fasi. A questo punto l'unica descrizione possibile del sistema è data dalla meccanica statistica.

Concludiamo questa sezione con una ulteriore nota storica: in questo articolo noi abbiamo fatto risalire il concetto di caos al lavoro fondamentale di Poincaré, al termine del diciannovesimo secolo. Il teorema KAM ci ha invece portato agli anni 50 del ventesimo secolo, in cui Enrico Fermi (con John Pasta e Stanislaw Ulam) in uno dei suoi ultimi lavori riprendeva un tema cui egli si era già interessato all'inizio della sua carriera scientifica [26], e riportava l'interesse dei fisici sulla dinamica non lineare e sul caos. La storia del fiorire di questo campo studi a partire dal lavoro di Fermi-Pasta-Ulam è narrata da uno dei protagonisti nella ottima review [27].

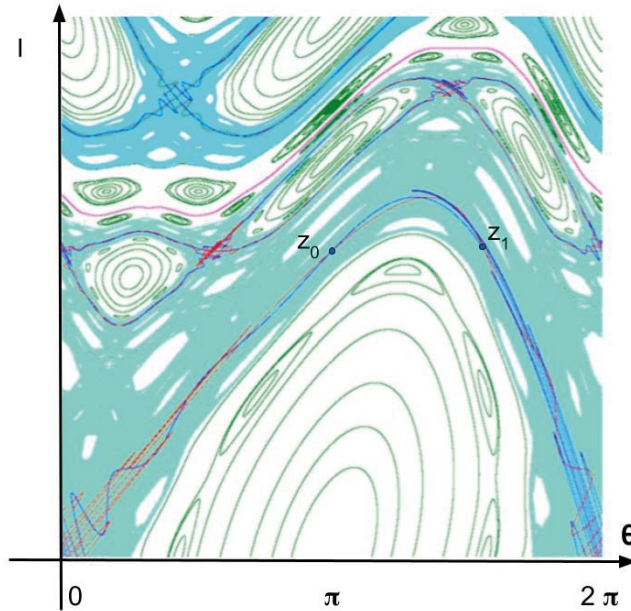


Fig. 8. – Spazio delle fasi misto per la Standard Map, per il valore critico $\kappa_c = 0.971635406$. Disegno ottenuto per gentile concessione, da Jim Meiss [23] con il software [24, 25] in cui abbiamo indicato i punti z_0 e z_1 della fig. 5. Sono evidenziati reticoli omoclini dei punti fissi e delle traiettorie periodiche iperboliche (in rosso e blu), curve invarianti (ciascuna di esse ottenuta iterando una sola traiettoria, in verde), l'ultimo toro invariante (fucsia) e aree caotiche (ciascuna di esse ottenuta dalla iterazione di una sola traiettoria, in azzurro e verde chiaro).

10. Verso l'essenza del caos: i biliardi

Abbiamo visto finora che le intersezioni omocline generano degli insiemi iperbolici nei pressi dei quali praticamente tutti i moti concepibili accadono, come mostrato dal ferro di cavallo di Smale, e come reso evidente dal lemma dell'orbita ombra. Il teorema KAM, per contro, ci ha mostrato come possano esistere zone nello spazio delle fasi ove il moto è quasi periodico. In un tipico sistema dinamico questi fenomeni sono compresenti e talora difficili da districare e dimostrare rigorosamente. Esiste tuttavia una famiglia di sistemi dinamici ove dimostrazioni rigorose sono possibili. In più, questa famiglia contiene sia membri completamente integrabili che totalmente caotici, il che la rende uno dei modelli preferiti da chi studia la dinamica. Stiamo parlando dei *biliardi*.

Si tratta ovviamente di oggetti idealizzati, costituiti da una regione del piano limitata da una curva semplice, chiusa, preferibilmente regolare, che ammette però anche un numero finito di punti angolari, come nel consueto biliardo rettangolare. In questo dominio una particella, supposta puntuale, si muove in linea retta con modulo della velocità costante, *rimbalzando* quando raggiunge il perimetro secondo la consueta legge *angolo di riflessione uguale angolo di incidenza*. In un certo senso, un

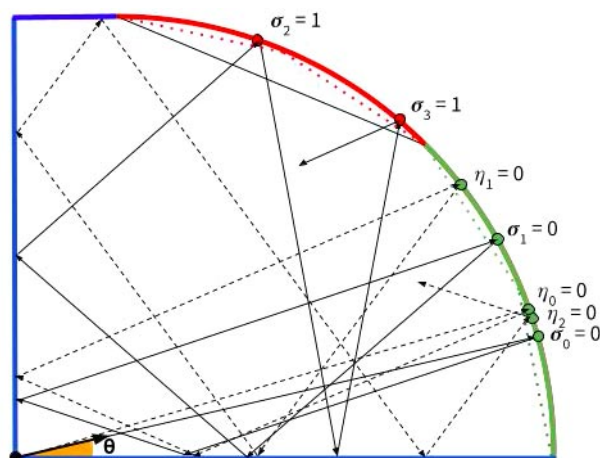


Fig. 9. – Il biliardo a quarto di stadio. Sono indicate due traiettorie (linea continua e linea tratteggiata) che differiscono leggermente nella direzione iniziale del moto, data dall'angolo θ . Esse generano due traiettorie simboliche σ ed η : la parte curva del bordo è codificata da 0 (verde) ed 1 (rosso). I segmenti punteggiati denotano una approssimazione poligonale dello stadio [30].

biliardo può rappresentare un modello idealizzato di gas, in cui gli urti di una particella test con le altre vengono simulati tramite gli urti con le sponde. Alcuni biliardi poco si adattano a questo ruolo, come ad esempio il già citato biliardo rettangolare, che è un esempio di moto integrabile: in esso la velocità di ciascuna traiettoria può assumere solamente quattro valori, mentre la particella di un gas varia una infinità di direzioni. Contrariamente al rettangolo, ed in generale ai biliardi poligonali, altre figure geometriche producono moti instabili e sono quindi un ottimo modello per cercare nella dinamica il fondamento della meccanica statistica, secondo i dettami di un campo di ricerca, anch'esso legato al caos, originato dai lavori di Maxwell e Boltzmann [28].

Un esempio di tali figure geometriche è il biliardo a forma di *stadio* rappresentato in fig. 9, [29] (invero, un quarto di stadio, ricavato da esso per fare a meno di essenziali simmetrie). Con una linea continua rappresentiamo una traiettoria che parte da un angolo del biliardo, corrispondente al centro dello stadio completo, formando un angolo θ con l'asse maggiore dello stadio. È parimenti rappresentata, con tratteggio, una seconda traiettoria, la quale parte dallo stesso punto ma con una piccola discrepanza nel valore dell'angolo iniziale. Seguendo il moto (magari ricalcando la figura con una matita) si può osservare come tale differenza iniziale venga amplificata nel tempo. Poiché questa differenza cresce esponenzialmente (come si può dimostrare in modo rigoroso), siamo di fronte al cosiddetto *effetto farfalla*, per cui una perturbazione arbitrariamente piccola porta ad effetti macroscopici in tempi fisicamente rilevanti, fatto già notato da Poincaré [31] e riscoperto da Lorenz [32] ed entrato ormai nel folklore, anche cinematografico. Questa instabilità esponenziale, che rende lo stadio un modello cui si può applicare una descrizione statistica, ci servirà nel capitolo successivo per introdurre il concetto di caos da un punto di vista fondamentale.

11. Il caos è la complessità algoritmica di un moto

La formalizzazione precisa dell'effetto farfalla si ottiene notando che la distanza d tra traiettorie inizialmente vicine cresce esponenzialmente nel corso del tempo, $d \sim e^{\lambda t}$, con *esponente di Lyapunov* λ positivo [33]. Per comprendere cosa sia veramente il caos, non bisogna però arrestarsi alla positività di questo esponente: infatti vogliamo ora mostrare che essa prelude ad un significato più profondo.

Consideriamo infatti cosa scrive Poincaré nel capitolo *Le Hasard*, in [31]:

il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.

Questa non è solo la formulazione di ciò che ora chiamiamo dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, ma una definizione che equipara *Caso* a *Caos*, *hasard* a *phénomène fortuit*. A questa intuizione possiamo oggi dare una forma rigorosa e pregnante di significato fisico.

In una sezione precedente abbiamo introdotto la dinamica simbolica del ferro di cavallo di Smale. In sintesi, essa permette di rappresentare il moto fisico di un sistema tramite la successione infinita di simboli presi da un alfabeto. In più, questa rappresentazione è *biunivoca*, cioè a dire che dalla traiettoria simbolica si può ritornare univocamente alla traiettoria fisica (a meno di un insieme di misura nulla di casi). Rigorosamente parlando, l'assegnazione dei simboli avviene tramite le cosiddette *partizioni di Markov* [34] dello spazio delle fasi, in insiemi disgiunti (nel caso del ferro di cavallo, i quadrilateri Q_0 e Q_1).

Torniamo ora al biliardo a quarto di stadio, introdotto nella sezione precedente, ed adottiamo un approccio fisico-sperimentale alla costruzione della sequenza simbolica, dividendo in due archi eguali la parte curva del bordo. Piazziamo dei sensori che rivelano quando la particella urta uno di tali archi, mandando un segnale che viene registrato come "0" (nel caso del confine verde in figura) oppure "1" (confine rosso). In questo modo otteniamo una successione ordinata di simboli che indichiamo con σ [30]. In fig. 9 è anche indicata una seconda traiettoria, reale e simbolica, η . Come fatto per il ferro di cavallo, vogliamo determinare le caratteristiche del moto analizzando solamente questa sequenza.

Due approcci sono possibili per ottenere questo risultato, ed entrambi portano ad una caratterizzazione del concetto di caos. È doveroso citare, pur senza entrare nei dettagli [35], il primo: negli anni '40 Claude Shannon [36] ha introdotto un concetto di *entropia* per caratterizzare *l'informazione* presente in una successione di simboli, basandosi sulla *predicibilità in senso statistico* di un simbolo della sequenza, conoscendo tutti i simboli precedenti. Questa entropia è stata poi applicata alle sequenze simboliche generate dalla dinamica tramite le partizioni di Markov, portando alla definizione della *entropia di Kolmogorov-Sinai* [37]. In questa visione, i sistemi caotici sono quelli nei quali questa entropia è positiva: grosso modo, in questi sistemi

il valore del simbolo σ_n al tempo n non è (statisticamente) ricavabile dalla conoscenza dei simboli precedenti.

Il secondo approccio, che vogliamo ora esporre perché porta alla comprensione più profonda del caos, è dato dalla teoria della *complessità algoritmica*, introdotta dallo stesso Kolmogorov, Chaitin e Solomonoff [38]. La sostanziale equivalenza tra questo approccio ed il precedente è stata mostrata da Alekseev e Brudno [39].

Per comprendere fisicamente questa teoria supponiamo di voler effettuare l'esperimento del biliardo nella stazione spaziale internazionale *ISS* e di doverne trasmettere sulla terra il risultato, cioè i simboli σ_n , per n da uno ad un valore *ovviamente finito* N . Denotiamo questa sequenza finita σ^N , poiché essa è la parte iniziale di una sequenza potenzialmente infinita σ . A prima vista, questo richiede di inviare N bits tramite la rete che collega la *ISS* alla terra. È possibile trovare un metodo più efficiente, che richieda di trasmettere un minor numero di bits, pur rendendo possibile, agli scienziati nella base di Houston sulla terra, di ricostruire esattamente l'intera sequenza σ^N ?

La teoria di Kolmogorov permette di formalizzare questa domanda. Infatti, essa definisce *complessità algoritmica* $K(\sigma^N)$ della sequenza finita $\sigma^N = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ la lunghezza in bits del *più corto programma* $\mathcal{P}(\sigma^N)$ che eseguito su un *computer universale* produce come *output* σ^N e termina il calcolo. Questa definizione porta con sé tutta la profondità della logica e dei suoi paradossi, perché $K(\sigma^N)$ è una quantità che non si può calcolare [38]. Tuttavia, essa si può stimare, ad esempio esibendo un programma particolare $\mathcal{P}'(\sigma^N)$ che calcola σ^N .

Per illustrare questa definizione consideriamo un caso elementare: i numeri in $[0, 1]$ si possono considerare come sequenze infinite di cifre decimali. I numeri razionali, come noto, hanno sequenze di cifre che terminano con una parte periodica infinita, come ad esempio $14/15 = 0.9\bar{3}$. In questo esempio, un programma $\mathcal{P}'(\sigma^N)$ può quindi essere il seguente: “ $\sigma_1 = 9$, $\sigma_j = 3$, per j da 2 a N ”. Il numero di bits per scrivere questo programma in un linguaggio come ad esempio il *Fortran* è dato da una costante C , indipendente da N , più $\log_2(N)$, il numero di bits necessario per scrivere N . Questa stima è valida per codificare qualsiasi sequenza periodica σ

$$(4) \quad K(\sigma^N) \leq C + D \log_2(N),$$

con C e D costanti opportune. È quindi evidente che in questo caso, al crescere di N , il programma $\mathcal{P}'(\sigma^N)$ è una compressione *efficiente* della informazione presente nella sequenza σ . All'estremo opposto dello spettro vi sono invece sequenze σ per cui il *miglior* programma $\mathcal{P}(\sigma^N)$ ha una lunghezza che cresce linearmente con N

$$(5) \quad K(\sigma^N) \sim C + DN.$$

L'informazione presente in queste sequenze *non* è significativamente comprimibile. La teoria di Kolmogorov definisce *aleatorie* sequenze infinite σ i cui troncamenti finiti σ^N hanno questa ultima proprietà: infatti esse sono *del tutto equivalenti ed indistinguibili da un processo stocastico* [38].

Sempre restando nell'esempio dei numeri reali, risulta che l'insieme dei numeri aleatori ha misura di Lebesgue uno: quasi tutte le successioni infinite di cifre sono aleatorie! Per specificare questi numeri, non si può infatti far di meglio che listare una ad una tutte le loro infinite cifre. Invece, i numeri non aleatori sono un insieme di misura zero, che contiene tra l'altro i numeri irrazionali più consueti, come ad esempio pi-greco, $\pi = 3.141592 \dots$. Benché questa sequenza di cifre passi alcuni *test statistici*, si può scrivere un programma di lunghezza data dal secondo membro della equazione (4) che calcola le prime N cifre di π , e questo è stato fatto per valori di N molto grandi.

Armata di questi concetti possiamo tornare al biliardo in esame. In fig. 9 vediamo come si costruisce dinamicamente la sequenza σ^N , di lunghezza N . Esiste un programma $\mathcal{P}'(\sigma^N)$ in grado di comprimere questa informazione? Questo programma ci viene suggerito da Laplace (il che ci indica tra l'altro che il cerchio del discorso sta per chiudersi, respiro di sollievo del lettore stanco). Conosciamo le leggi della natura (punto uno della citazione di Laplace nella Introduzione) e conosciamo le condizioni iniziali del moto (punto due): possiamo determinare σ^N ! Chiediamoci però che *vastità di intelligenza* ciò richiede (punto tre della citazione) —e quindi, in linguaggio moderno, che complessità algoritmica ha questa codifica.

Il codice così delineato consiste di due parti. La prima concerne la forma del biliardo, la legge della riflessione elastica e l'assegnazione dei colori sul bordo. Questa parte ovviamente richiede un numero finito di bits: si pensi come sopra di scrivere questo programma in *Fortran*. La seconda parte del programma codifica la lunghezza N della sequenza (che richiede $\log_2(N)$ bits) e soprattutto l'angolo θ con cui parte la traiettoria.

Ay, there is the rub, come direbbe Amleto: l'angolo θ è una successione infinita di cifre binarie θ_i : $\theta = \pi/2 \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i 2^{-i}$. Quante cifre di θ si devono trasmettere, affinché sulla terra si sia in grado di calcolare la sequenza σ^N ? Vediamo infatti che in fig. 9 una piccola differenza nelle condizioni iniziali causa una variazione nella traiettoria simbolica già al terzo rilevamento: $\sigma_2 \neq \eta_2$. La risposta che fornisce una dimostrazione rigorosa (e illustrata dall'esperimento [30]) è: un numero *proporzionale a N* . Questo risultato si può spiegare euristicamente: passando infatti nella regione rettangolare dello stadio, successivamente ad ogni urto con la parete curva, un fascio di traiettorie viene *sfuocato* e questo comporta una perdita di collimazione che cresce esponenzialmente nel numero di urti. Per conseguenza, all'aumentare di tale numero, cresce proporzionalmente il numero di cifre di θ necessarie a determinare su quale parte del bordo, codificata da 0 oppure da 1, inciderà la traiettoria.

Poiché, come visto, quasi tutte le successioni θ hanno complessità che cresce linearmente con N , lo stesso accade a $\mathcal{P}'(\sigma^N)$: vale la stima (5) e quindi *a meno di un insieme di misura zero queste traiettorie del biliardo a quarto di stadio sono aleatorie!* Quindi, quando N cresce, trasmettere sulla terra il programma $\mathcal{P}'(\sigma^N)$ ha sostanzialmente lo stesso peso di trasmettere *verbatim* la sequenza originale σ^N .

Noi assumiamo quindi questa come la definizione più profonda ed universale di caos: un moto è *caotico* quando è rappresentabile da una sequenza simbolica aleatoria: la predicibilità in questo caso diviene una illusione, come presagito da Poincaré: la

soluzione delle equazioni della teoria fisica sta solamente copiando traslitterate le cifre della condizione iniziale! Non esiste un codice più compatto di quanto sia sedersi ad osservare il moto: nelle parole di Joseph Ford, *un sistema caotico è il computer più efficiente di se stesso e la sua descrizione più concisa.*

12. Conclusione: il caos è aleatorietà deterministica

Il terzo elemento della discussione di Laplace, lo studio della *vastità* dell'intelligenza in grado di elaborare l'informazione presente nelle leggi di natura e nelle condizioni iniziali, e con queste determinare il moto di un sistema dinamico, ci ha portato alla definizione di caos come *aleatorietà deterministica*: traiettorie di un moto caotico, benché governate da leggi rigorose e non eludibili, si rappresentano tramite sequenze di simboli complesse ed in questo senso aleatorie, come se generate da un processo stocastico.

Questo, che potrebbe apparire come un fatto negativo per la descrizione dei fenomeni naturali (ma anche di quelli economici, sociali, etc.), ha invece portato ad una maggiore loro comprensione. I sistemi integrabili sono in linea di principio esattamente risolvibili, ma strutturalmente instabili: una qualunque piccola perturbazione ne distrugge l'integrabilità, come abbiamo visto nell'esempio del pendolo. Per questo essi sono di limitata utilità nelle scienze naturali. Per contro, dopo una generica perturbazione un sistema caotico rimane tale. Questo è di importanza cruciale in quanto permette di fare previsioni certe circa osservabili macroscopiche: il moto delle molecole all'interno di un gas è totalmente caotico ed imprevedibile; proprio per questo possiamo prevedere con certezza quantità quali temperatura, pressione, conducibilità, etc.

Un cenno a parte riguarda la meccanica quantistica. Se consideriamo ad esempio il biliardo che abbiamo studiato in questo lavoro, esso si può trattare anche quantisticamente. Poiché esso è un sistema conservativo in un numero finito di gradi di libertà, un teorema stabilisce che lo spettro del suo operatore di evoluzione temporale quantistico è discreto e quindi il suo moto è quasi periodico, l'opposto del comportamento caotico classico. Vuole questo dire che in meccanica quantistica — e quindi nella realtà del mondo fisico — non esiste il caos? Non entriamo qui nel problema della descrizione del caos in dinamica quantistica (rimandando il lettore alle referenze [40, 41] che lo affrontano da vari punti di vista, tra cui quello della complessità adottato in questo lavoro) ma notiamo che la distinzione tra spettro discreto e spettro continuo diventa precisa nel limite di tempo infinito. Per tempi finiti (tipicamente molto piccoli, per sistemi caotici, per i quali infatti crescono solo come il logaritmo della azione di un sistema divisa per la costante di Planck), la dinamica quantistica può corrispondere alla meccanica classica. D'altro canto, la natura caotica del biliardo classico viene rivelata dalla distribuzione statistica degli autovalori del corrispondente biliardo quantistico: essa ubbidisce a proprietà universali identiche a quelle degli autovalori di matrici aleatorie, che la distinguono nettamente dalle proprietà spettrali di un sistema con limite classico integrabile.

Per concludere, il concetto di caos ha raggiunto praticamente ogni campo della fisica, estendendosi anche alla descrizione dei *sistemi complessi*, un campo che qui possiamo solamente menzionare ma che è talmente vasto ed importante da meritare un articolo a parte. In questo lavoro abbiamo anche ommesso di descrivere la vastità delle applicazioni pratiche delle tecniche della dinamica non lineare. Abbiamo invece posto l'accento sulla natura teorica fondamentale del concetto di caos dinamico, che speriamo di aver fatto emergere in modo non troppo confuso.

* * *

Lavoro in parte finanziato dal progetto PRIN 2017S35EHN "Regular and stochastic behavior in dynamical systems".

Bibliografia

- [1] ARUOET F. M. - VOLTAIRE, *Dictionnaire Philosophique* (1764).
- [2] COHN N., *Cosmos, Chaos and the World to Come*, Cap. 1 e 2 (Yale University Press) 2001.
- [3] ROMAGNOLI E., *Versione poetica degli uccelli dell'Aristofane* (G. C. Sansoni, Firenze) 1899.
- [4] SANDFORD S. A. *et al.*, "Organics Captured from Comet 81P/Wild 2 by the Stardust Spacecraft", *Science*, **314** (2006) 1720.
- [5] GALILEI G., *Il Saggiatore* (1623).
- [6] LAPLACE P.-S., *Essai philosophique sur les probabilités* (Paris) 1814.
- [7] CONIGLIO A., "Reversibilità e freccia del tempo", *Giornale di Fisica*, **61** (2020) 185.
- [8] Le figure riprodotte nel testo sono presentate nel sito <http://www.mittag-leffler.se/library/henri-poincare> insieme ad una vasta documentazione.
- [9] ANDERSSON K. G., "Poincaré's Discovery of Homoclinic Points", *Archive for History of Exact Sciences*, **48** (1994) 133. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three-Body Problem* (Am. Math. Soc., Providence, R.I.) 1996.
- [10] POINCARÉ H., "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", *Acta Math.*, **13** (1890) 1.
- [11] SMALE S., "Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms", *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, 3 serie, tomo **17** (1963) 97.
- [12] ANOSOV D. V., "On a class of invariant sets of smooth dynamical systems", *Proc. 5th Int. Conf. on Nonlin. Oscill.*, Kiev, **2** (1970) 39.
- [13] BOWEN R., *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes Math.*, Vol. **470** (Springer, Berlin) 1975.
- [14] OTT E., GREBOGI C. and YORKE J. A., "Controlling chaos", *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 2837.
- [15] BOLLT E. M. and MEISS J. D., "Targeting Chaotic Orbits to the Moon Through Recurrence", *Phys. Lett. A*, **204** (1995) 373.
- [16] ARNOL'D V. I., *Metodi matematici della meccanica classica* (Editori Riuniti) 1979.
- [17] KOLMOGOROV A. N., "Preservation of conditionally periodic movements under a small change in the Hamilton function" (1954), translated in *Springer Lect. Notes in Physics*, **93** (1979) 51; ARNOL'D V. I., "Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasiperiodic motions under small perturbations of the Hamiltonian", *Russ. Math. Surv.*, **18** (1963) 5; MOSER J., "On invariant curves of area preserving mappings of an annulus", *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl.*, **2** (1962) 1.
- [18] ARNOL'D V. I., "On the classical perturbation theory and the stability problem of planetary systems", *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962) 1008.
- [19] CHIRIKOV B. V., "A universal instability of many-dimensional oscillator systems", *Phys. Rep.*, **52** (1979) 263.
- [20] GREENE J., "A method for determining a stochastic transition", *J. Math. Phys.*, **20** (1979) 1183.

- [21] MACKAY R. S. and PERCIVAL I. C., “Converse KAM: Theory and practice”, *Commun. Math. Phys.*, **98** (1985) 469.
- [22] MEISS J. D., “Symplectic maps, variational principles, and transport”, *Rev. Mod. Phys.*, **64** (1992) 795.
- [23] <https://amath.colorado.edu/pub/dynamics/papers/StdMap.pdf>.
- [24] <https://amath.colorado.edu/faculty/jdm/stdmap.html>.
- [25] MEISS J. D., “Visual Explorations of Dynamics: The Standard Mapping”, *Pramana, Indian Academy of Sciences*, **70** (2008) 965.
- [26] FERMI E., “Dimostrazione che in generale un sistema meccanico è quasi ergodico”, *Nuovo Cimento*, **25** (1923) 267.
- [27] FORD J., “The Fermi-Pasta-Ulam problem: paradox turns discovery”, *Phys. Rep.*, **213** (1992) 2671.
- [28] KRYLOV N. S., *Works on the Foundations of Statistical Physics* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey) 1979. Originale russo (1950).
- [29] BUNIMOVICH L. A., “On ergodic properties of some billiards”, *Func. Anal. Appl.*, **8** (1974) 73.
- [30] MANTICA G., “Quantum Algorithmic Integrability: The Metaphor of Rational Billiards”, *Phys. Rev. E*, **61** (2000) 6434.
- [31] POINCARÉ H., *Science et Méthode* (Paris) 1908.
- [32] LORENZ E. N., “Deterministic Nonperiodic Flow”, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963) 130.
- [33] LYAPUNOV A. M., “Problème général de la stabilité du mouvement”, *Ann. Math. Studies*, **17** (1977) 531 (Originale russo, Kharkow, 1892); LYAPUNOV A. M., “The general problem of the stability of motion”, *Int. J. Control*, **55** (1992) 531.
- [34] SINAI YA. G., “Construction of Markov partitions”, *Functional Anal. Appl.*, **2** (1968) 245.
- [35] KATOK A. and HASSELBLATT B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge University Press) 1995.
- [36] SHANNON C. E., “A mathematical theory of communication”, *Bell Syst. Techn. J.*, **27** (1948) 379.
- [37] KOLMOGOROV A. N., “A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue Spaces” (1958) translated in *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986) 97.
- [38] KOLMOGOROV A. N., “Three Approaches to the Definition of the ‘Amount of information’ Concept”, *Problemy Peredachi Informatsii [Problems in information Transmission]*, **1** (1965) 1; CHAITIN G. J., “On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequences”, *J. ACM*, **13** (1966) 547; SOLOMONOFF R. J., “A formal theory of inductive inference. Part I and II”, *Inf. Control*, **7** (1964) 1; 224. Per una introduzione concisa si veda CHAITIN G. J., “Algorithmic Information Theory”, in *Encyclopedia of Statistical Sciences* (Wiley) 2004.
- [39] ALEKSEEV V. M. and YAKOBSON M. V., “Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems”, *Phys. Rep.*, **75** (1981) 290.
- [40] CASATI G. and CHIRIKOV B. V., “The legacy of chaos in quantum mechanics”, in *Quantum Chaos* (Cambridge University Press) 1995; CASATI G. and CHIRIKOV B. V., “Quantum Chaos: unexpected complexity”, *Physica D*, **89** (1995) 220.
- [41] FORD J., MANTICA G. and RISTOW G., “The Arnol’d Cat: Failure of the correspondence principle”, *Physica D*, **50** (1991) 493; FORD J. and MANTICA G., “Does quantum mechanics obey the correspondence principle? Is it complete?”, *Am. J. Phys.*, **60** (1992) 1086; CHIRIKOV B. V. and VIVALDI F., “An algorithmic view of pseudo-chaos”, *Physica D*, **129** (1999) 223; MANTICA G., “The Multiparticle Quantum Arnol’d Cat: a test case for the decoherence approach to quantum chaos”, *Journal of Siberian Federal University*, **3** (2010) 369; MANTICA G., “Many-Body Systems and Quantum Chaos: The Multiparticle Quantum Arnol’d Cat”, *Condens. Matter*, **4** (2019) 72.