GIORNALE DI FISICA VOL. LX, N. 4 Ottobre-Dicembre 2019
DOI 10.1393/gdf/i2020-10350-3

PER SAPERNE DI PIÙ

Le parole della fisica: Dimensione
The words of physics: Dimension

Dario Benedetto e Emanuele Caglioti

Dipartimento di Matematica - Sapienza Università di Roma, Roma, Italia

Riassunto. Individuare le dimensioni fisiche delle variabili in gioco in un fenomeno a volte permette di ottenere importanti informazioni sulle leggi fisiche che lo governano, senza conoscerle fino in fondo. Questa tecnica passa sotto il nome di "analisi dimensionale", e ha il suo fondamento nel principio di omogeneità dimensionale delle equazioni della fisica, e nella loro invarianza per cambiamenti di unità di misura. Il controllo dell'omoegenità dimensionale di una equazione è inoltre un formidabile strumento per verificarne la correttezza, di estrema utilità sia nella didattica sia nella pratica scientifica. In questo articolo ripercorriamo sinteticamente il percorso che porta dalla definizione delle unità di misura al concetto di dimensione, sottolineando qualche aspetto più sottile, per poi concentrarci su alcuni esempi di analisi dimensionale.

Abstract. Sometimes, the identification of the physical dimensions of the variables involved in a phenomenon allows to obtain important information on the physical laws without knowing them completely. This technique is called "dimensional analysis", and has its foundation in the principle of dimensional homogeneity of the equations of physics, and on their invariance for unit changes of measurement. The check of dimensional homoegenity is also is a formidable tool for verify its fairness, and is extremely useful both in teaching and in scientific practice. In this article we briefly show the path that leads from the definition of the units of measurement to the concept of dimension, emphasizing the more subtle aspects. Finally we focus on some examples of dimensional analysis.

1. Introduzione

Nella pratica dell'insegnamento è molto comune la scelta semplificatrice di trascurare gli aspetti dimensionali nelle equazioni: nonostante si impari da subito a "non confrontare le mele con le pere", quando si scrive l'equazione della parabola $y = x^2$ gli aspetti algebrici fanno dimenticare a tutti, docenti e studenti, che questa relazione non è dimensionalmente corretta (una lunghezza non può essere il quadrato di una lunghezza). E anche gli aspetti geometrici possono nascondere insidie dimensionali: una delle nozioni più solide degli studenti è che il coefficiente angolare di una retta è la tangente dell'angolo, ma in una rappresentazione cartesiana di un moto rettilineo uniforme il coefficiente di proporzionalità tra le variazioni di tempo e spazio è una velocità, cioè una grandezza con le sue unità di misura, e non potrà mai essere la tangente di un angolo, che è invece un "numero puro", cioè adimensionale.

In questo articolo vogliamo ripercorrere, sinteticamente, la definizione di unità di misura e il passaggio al concetto di dimensione fisica, sia perché è un argomento fondamentale in fisica, sia perché l'attenzione alla correttezza dimensionale delle relazioni tra grandezze può essere un utile strumento didattico nell'insegnamento. Può essere utile, inoltre, per migliorare le competenze matematiche degli studenti, facendoli esercitare su espressioni che abbiano variabili e parametri, e contribuendo a selezionare esempi interessanti di funzioni su cui sperimentare le tecniche dell'analisi matematica.

2. Le unità di misura

La nascita delle civiltà si è accompagnata alla nascita di sistemi standardizzati di misura, necessari per lo sviluppo dei commerci (misure di peso e capacità) per il consolidamento delle strutture amministrative (misure di terreni), per le esigenze dei riti religiosi (misure di tempo). È solo con i Greci, però, che queste conoscenze di natura pratica diventano una teoria, in cui la possibilità di quantificare il rapporto tra due grandezze, cioè misurare l'una in termini dell'altra, si identifica con il loro essere "omogenee", cioè della stessa natura. Infatti, Euclide, nel III secolo a.C., riporta o rielabora la teoria delle proporzioni di Eudosso, legandola strettamente ai concetti di "grandezza" e "misura" [1]. All'inizio del libro V si leggono le seguenti definizioni:

1. Una grandezza è parte di una grandezza, la minore della maggiore, quando misuri completamente la maggiore.
2. È multiplo, la maggiore della minore, quando sia misurata completamente dalla minore.
3. Rapporto di due grandezze omogenee è la maniera di relazione secondo il valore.
4. Sono dette avere rapporto le grandezze che, se ne sono presi multipli, possono eccedersi tra loro.

La trattazione delle proporzioni in Euclide è proprio la teoria del confronto tra grandezze omogenee, nella sua versione astratta, quasi assiomatica: si descrivono le grandezze senza realmente definirle, e si mostrano le proprietà delle misure, senza descrivere come vengono ottenute.

In termini moderni, ma coerenti con l'impostazione euclidea, chiameremo "grandezza fisica" una proprietà, di oggetti o di eventi, suscettibile di essere confrontata, nel senso che deve esistere una procedura fisica che permetta di affermare se due campioni della proprietà sono minori, uguali, o maggiori l'uno dell'altro. Inoltre, deve esistere una procedura fisica che permetta di sommare due campioni della proprietà. In questo modo diventa possibile definire multipli e sottomultipli di un campione, cioè moltiplicarlo e dividerlo per numeri interi. Con gli stessi passaggi concettuali che permettono di definire i numeri razionali a partire dai numeri interi, si arriva a poter stabilire se due campioni sono in rapporto razionale (un multiplo intero di uno uguaglia un multiplo intero dell'altro), e infine ad attribuire un numero reale al confronto di un campione di una grandezza con un altro, scelto come riferimento, che chiameremo *unità di misura*.

Introduciamo qualche notazione. Indicheremo con Q un campione di una grandezza fisica, con U un altro campione che scegliamo come unità di misura e con q il valore numerico della grandezza Q in rapporto all'unità di misura U. Con l'espressione $Q = q\,U$ rappresentiamo l'esito della misura: il rapporto tra i due campioni Q e U è il numero q, mentre la misura di Q è il valore numerico q insieme all'unità di misura utilizzata U. Per esempio, se $q = 5$ e U è un chilometro, allora $Q = 5\,\mathrm{km}$. La scrittura che abbiamo usato è una riformulazione di facile uso della seguente proporzione $Q : U = q : 1$.

Come cambia la misura se si cambia l'unità di misura? Per esempio, se scegliamo un'unità di misura U' che è un decimo della precedente, cioè se $U = 10U'$, allora,

$$q'\,U' = Q = q\,U = q\,10U' \quad \text{e quindi } q' = 10q.$$

Si può notare che questo passaggio aritmetico, che ci sembra del tutto evidente, in realtà coinvolge numeri e grandezze, e il suo fondamento rigoroso è di nuovo nella teoria delle proporzioni tra grandezze omogenee, infatti

$$q' : 1 = Q : U' = (10Q) : (10U') = 10Q : U = 10q : 1.$$

Questo esempio serve a mettere in luce una proprietà cruciale delle misure: il valore numerico di una misura *scala direttamente* con l'unità di misura, nel senso che se la vecchia unità di misura è α volte la nuova, il valore numerico si moltiplica per α. Per esempio 5 km = 5 × 1000 m = 5000 m. È il caso di osservare che nella pratica quotidiana usiamo implicitamente un'unità di misura per le quantità discrete, l'unità, e che le quantità discrete obbediscono alle leggi di scala delle grandezze fisiche: per esempio il numero di abitanti di una nazione è il doppio del numero di abitanti contati a coppie, e mille volte il numero contato a migliaia.

Ogni civiltà ha scelto le sue unità di misura per i pesi, gli intervalli di tempo, le lunghezze (e le superfici e i volumi). Con lo sviluppo delle scienze e con la diffusione di nuove tecnologie, è stato però necessario introdurre nuove grandezze e nuove unità di misura (si pensi a quelle necessarie per descrivere i fenomeni elettromagnetici). Inoltre, dall'Illuminismo in poi, le necessità dei commerci e le necessità delle scienze hanno portato all'adozione di unità di misura comuni, attualmente codificate nel "Sistema internazionale delle unità di misura". È interessante notare che questa sistematizzazione, che individua nella possibilità di confronto sperimentale la natura stessa di grandezza fisica, e che ci sembra del tutto naturale, nasconde qualche difficoltà. Per esempio, mentre scriviamo questo articolo, la pagina di Wikipedia `https://it.wikipedia.org/wiki/Grandezza_fisica` afferma che la temperatura, pur avendo una sua unità di misura nel Sistema Internazionale, non è una grandezza fisica propriamente detta. Infatti mentre possiamo facilmente confrontare due temperature con un termometro, non è evidente come si possano sommare (ma Sonin in [2] osserva che la temperatura assoluta è una grandezza fisica, e descrive come si possono sommare due temperature mediante macchine di Carnot). Come altro esempio, più filosofico, si può osservare che la massa di un elettrone e di una stella non si misurano certo nello stesso modo, ma implicitamente riteniamo che si tratti di due esempi di una stessa grandezza fisica.

3. Le unità di misura derivate

Dalle unità di misura di lunghezza, tempo e massa si possono ottenere le unità di misura derivate, con cui si può descrivere tutta la Meccanica classica. Per esempio, moltiplicando chilogrammi per metri e dividendo per secondi al quadrato si ottiene l'unità di misura della forza. D'altra parte, richiamando Euclide abbiamo insistito sul fatto che si possono fare operazioni solo tra grandezze omogenee. Dunque l'introduzione di rapporti e prodotti di unità di misura richiede qualche spiegazione in più.

Aree e volumi sono i prototipi, geometrici, di grandezze fisiche derivate, infatti misuriamo superfici in metri quadri e volumi di solidi in metri cubi. Però va notato che in linea di principio a ogni grandezza fisica si può associare una sua unità di misura coerente con la procedura con cui si effettua la misura, senza necessariamente metterla in relazione con le unità di misura di altre grandezze. Per esempio, si può misurare l'area di una superficie in termini del numero di cartoline postali uguali, necessarie per ricoprirla (vedi [2]). Inoltre, sono attestate nel Medioevo europeo misure di aree di campi coltivabili espresse mediante il tempo che un uomo impiega per lavorarli (fig. 1) o mediante la quantità di semenza utilizzata (vedi [3]). Questi esempi non ci dicono che un'area è una cartolina, o che è un tempo, o un numero di semi, e portando questo ragionamento alle sue estreme conseguenze, potremmo anche concludere che l'area non è il quadrato di una lunghezza.

Se questa conclusione può sembrare un po' estrema, consideriamo il caso della forza, che è una proprietà fisica misurabile, per esempio mediante i dinamometri. Newton scopre che nei moti la forza è proporzionale alla massa per l'accelerazione del corpo, ma questo non vuol dire che la forza *sia* una massa per un'accelerazione. A questo proposito, Sonin riporta, in [2], che il British Engineering System usa come grandezze fondamentali da cui derivare tutte le altre lo spazio, il tempo, la massa e la forza. In questo sistema la legge di Newton si scrive $F = cma$, dove c è una costante fisica con le dimensioni di una forza/(massa $\times$ accelerazione) (vedi anche [4], cap. VIII).

Chiediamoci dunque cosa sono i "rapporti" e i "prodotti" di unità di misura. La chiave di queste definizioni risiede nella proprietà di scala delle misure, che abbiamo descritto precedentemente.

Fig. 1. – Miniatura, anno 1000 circa. Nel Medioevo europeo le superfici delle terre coltivate venivano misurate in giornate di lavoro.

3.1. Rapporti di unità di misura

Consideriamo la densità dei liquidi. È un fatto sperimentale che uguali volumi di diversi liquidi hanno masse differenti, inoltre la massa è proporzionale al volume. Dunque c'è una proprietà fisica, la densità, che varia al variare del materiale. Senza coinvolgere unità di misura di altre grandezze, potremo usare come unità di misura della densità quella dell'acqua: la misura della densità di un liquido sarà q se la massa di un volume di liquido è q volte la massa del corrispondente volume di acqua. D'altra parte, assumendo per semplicità che la massa di un litro di acqua sia un chilogrammo (che è approssimativamente vero), q è anche pari alla massa in chilogrammi di un volume di litro di liquido. Usando questa seconda definizione, q cambia se si cambiamo le unità di misura della massa e del volume. È semplice constatare che q scala direttamente con l'unità di misura della massa, e inversamente con l'unità di misura del volume. Questa proporzionalità inversa dà senso alla definizione dell'unità di misura della densità come

$$\text{massa in kg/volume in litri,}$$

dove il simbolo di divisione "/" indica proprio come la misura della densità scala con il reciproco dell'unità di misura di volume.

Allo stesso modo, la velocità è una proprietà del moto dei corpi che ha la natura di grandezza fisica e potremmo assegnarle sue proprie unità di misura, ma la proporzionalità tra spazi percorsi e tempi impiegati nei moti rettilinei uniformi ci permette di usare come unità di misura il "rapporto" spazio/tempo, perché scala come l'unità di misura dello spazio e come il reciproco dell'unità di misura del tempo.

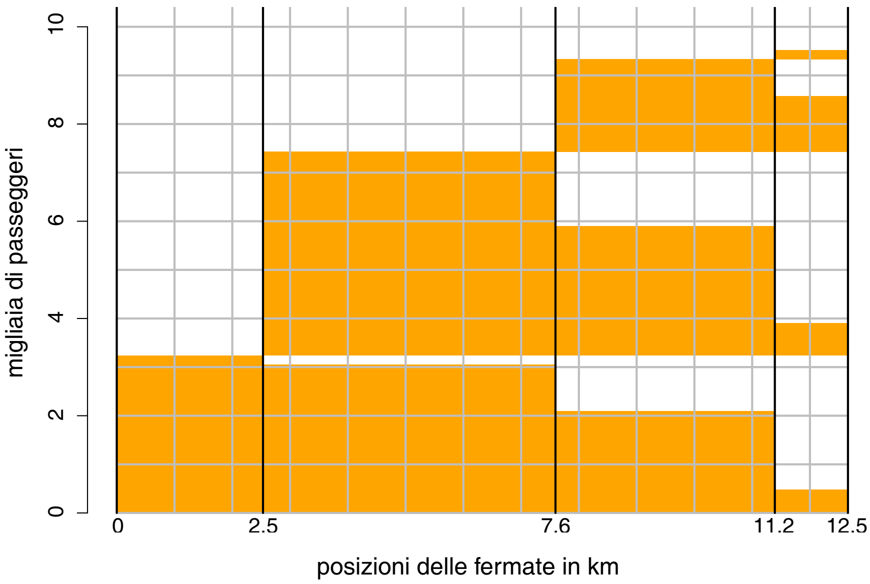

Fig. 2. – Rappresentazione dei viaggi giornalieri tra alcune fermate di una linea di metropolitana. Un rettangolo della griglia nel piano cartesiano rappresenta mille passeggeri che percorrono un chilometro in un giorno.

3.2. Prodotti di unità di misura

Consideriamo il problema di confrontare il servizio di trasporto pubblico di diverse linee di metropolitana. Si può confrontare la lunghezza in km delle linee, o si può confrontare il numero di passeggeri in tempo fissato per esempio in un giorno. Questi due confronti colgono due aspetti diversi, ed è interessante combinarli insieme. Rappresentiamo il viaggio di ogni singolo passeggero in un grafico cartesiano come in fig. 2, con in ascissa il percorso in chilometri della linea e in ordinata i passeggeri in un giorno, contati a migliaia. Ogni rettangolo rappresenta un chilometro percorso da mille passeggeri.

Il numero complessivo di rettangoli è una misura della capacità della linea e l'unità di misura che stiamo introducendo è il "km al giorno per migliaia di passeggeri", dove "al" vuol dire che la misura scala con il reciproco dell'unità di misura del tempo, mentre "per" vuol dire che scala direttamente con l'unità di misura della numerosità. Per esempio una linea può avere una capacità di 1.2×10^3 migliaia di passeggeri $\times$ km/giorno, che potremmo anche esprimere come 1.2 migliaia di chilometri per migliaia di passeggeri al giorno, o come 1.2 chilometri per milione di passeggeri al giorno. Infine potremmo anche esprimere questa quantità come $13.89\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ per passeggero, anche se la misura di capacità che abbiamo introdotto non ha nulla a che fare con la velocità dei treni delle metropolitane!

Sono moltissime le grandezze derivate differenti esprimibili nelle stesse unità di misura derivate. Questo fatto non nasconde quasi mai un qualche segreto fisico, ma ci ricorda il lavoro di sintesi che compiamo identificando una grandezza con un prodotto o un rapporto di altre. Un esempio classico di queste uguaglianze è che il lavoro di una forza e il momento di una forza si possono entrambe esprimere in newton per metro, pur trattandosi di grandezze differenti. Come ulteriore esempio si consideri l'azione in meccanica razionale, che si misura come una energia per un tempo e dunque ha la stessa unità di misura del momento della quantità di moto. In particolare la costante di Planck h è un'energia diviso una frequenza, dunque è un'azione. Nonostante azione e momento della quantità di moto siano grandezze fisiche differenti, è il caso di ricordare che le prime teorie quantistiche si sono sviluppate quantizzando sia le azioni che i momenti.

3.3. Grandezze di base

La possibilità di considerare rapporti e prodotti di differenti unità di misura permette di considerare qualunque potenza razionale di unità di misura: possiamo misurare le aree con il quadrato delle lunghezze, così come le lunghezze con la radice quadrata del numero di ore di lavoro agricolo con cui venivano misurate le aree nel medioevo. A questo punto è però indispensabile chiedersi quali siano le "grandezze di base", cioè quelle con unità di misura indipendenti tra loro, e sufficienti per generare le unità di misura di tutte le altre grandezze. Questa scelta dipende dalla classe di fenomeni fisici che si vogliono studiare, e ha dei margini di arbitrarietà. In meccanica possiamo per esempio scegliere lunghezza, tempo, massa ma anche lunghezza, velocità e forza. La termodinamica rende più interessante il quadro: la temperatura assoluta è una grandezza fisica, e ha una sua unità di misura nel SI, il kelvin, ma la teoria cinetica ci dice che la temperatura è proporzionale all'energia cinetica media dei costituenti microscopici, e infatti la costante di Boltzmann k_{B} permette di passare dai joule ai kelvin. Non è dunque necessario introdurre l'unità di misura della temperatura per descrivere la termodinamica, infatti nella teoria cinetica e in termodinamica la temperatura compare nella combinazione $k_{\mathrm{B}}T$ che è un'energia. Però mentre non abbiamo difficoltà a pensare che la temperatura sia un energia, non vivendo quotidianamente esperienze relativistiche siamo meno disposti a pensare che la lunghezza sia il reciproco di un tempo, solo perché la velocità della luce nel vuoto è una costante.

In generale, l'esistenza di costanti fisiche fondamentali (come la velocità della luce, la costante di Planck, la costante di Boltzmann) permette di economizzare nella scelta delle unità di misura fondamentali, ed esistono modi, non equivalenti, di definire tutte le unità di misura in termini delle costanti fisiche fondamentali, realizzando un sistema in cui non esistono unità di misura di base (vedi [4]).

Le revisioni del Sistema Internazionale di unità di misura sono andate in questa direzione, definendo le unità di base in termini di alcune costanti fisiche. Il secondo è definito attraverso l'hertz, a sua volta definito fissando a 9192 631 770 Hz la frequenza della radiazione della transizione iperfina del cesio 133, mentre il metro è definito in termini del secondo e della velocità della luce, e il chilogrammo, dal 2019, è definito in termini del secondo, del metro e della costante di Planck. Infine, il kelvin è definito in termini di secondi, metri, chilogrammi e della costante di Boltzmann.

A questo proposito è interessante osservare che anche nella Cina del periodo delle "primavere e degli autunni" (che termina intorno al 450 a.C.) le unità di misura di lunghezza, capacità e peso erano ottenute a partire da una frequenza, quella del suono emesso da una campana percossa in modo opportuno, e da qualche "costante fondamentale", in questo caso il peso dei semi di miglio. Questa nota, infatti, fissava le dimensioni di una canna di flauto in grado di riprodurla, e dalle dimensioni della canna si ottenevano quelle di lunghezza e capacità e l'unità di peso riempiendo il flauto con i semi (vedi [5, 6]).

4. Dalle unità di misura alla dimensione

In generale, l'unità di misura derivata di una grandezza Q sarà il prodotto di opportune potenze di unità di misura U_i delle grandezze di base (eventualmente moltiplicato per un coefficiente numerico)

$$U_Q = \prod_{i=1}^{n} U_i^{r_i}.$$

Per esempio, indicando con U_M, U_L, U_T delle unità di misura di massa, spazio e tempo, useremo il prodotto $U_M^1 U_L^1 U_T^{-2}$ come unità di misura della forza.

Se si cambiano le unità di misura di base in $U_i' = \alpha_i U_i$, con $\alpha_i > 0$, il valore di Q nella nuova unità di misura $U_Q' = \prod_{i=1}^{n} U_i'$ cambia come

$$q' = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{r_i}\, q,$$

dove q è il valore di Q rispetto a U_Q. Questa proprietà di scala sarà essenziale per la definizione di dimensione fisica.

È da notare che il fatto che tra unità di misura siano possibili solo relazioni a potenza è un risultato piuttosto profondo, e si può dimostrare assumendo l'equivalenza tra tutte le scelte di unità di misura in una stessa classe, cioè una volta fissate le grandezze fisiche di base (si veda [7]).

Il passaggio al concetto di dimensione è dovuto a Fourier, che estende alla fisica il consolidato concetto di dimensione geometrica. Già Euclide enunciava il principio di inconfrontabilità di enti geometrici di differenti dimensioni, e lo stesso Cartesio, che inventa la geometria analitica in cui compaiono potenze arbitrarie delle incognite, era ben consapevole che un'espressione del tipo $y = x^2$ era una rappresentazione in coordinate che oggi chiamiamo adimensionali.

Come riportato da Macagno [8], nella sua *Teoria analitica del calore* [9] Fourier considera la dipendenza (a potenza) dall'unità di misura della lunghezza delle varie grandezze fisiche, e chiama dimensione l'esponente della potenza. Per esempio afferma che x, "numero di unità di lunghezza" ha dimensione 1, D, la densità, ha dimensione -3, C, il calore specifico, ha dimensione 0. È interessante il motivo per cui Fourier

	LONGUEUR.	DURÉE.	TEMPÉRATURE.
Exposant de dimension de...... x	1	0	0
t	0	1	0
v	0	0	1
La conducibilité spécifique..... k	-1	-1	-1
La conducibilité de la surface... h	-2	-1	-1
La capacité de chaleur......... c	-3	0	-1

Fig. 3. – La dimensione di alcune grandezze fisiche secondo Fourier in [9].

sente la necessità di fare queste osservazioni. In una prima edizione del suo lavoro sul calore, Fourier aveva usato due simboli per indicare quattro differenti quantità. Per correggersi, Fourier invita il lettore a sciogliere da solo l'ambiguità creata dal suo errore, mettendo in evidenza la dimensione (nella sola lunghezza) delle varie grandezze. In pratica Fourier introduce il concetto di dimensione inventando il controllo dimensionale di una relazione tra grandezze fisiche!

In una edizione successiva (fig. 3), Fourier prende anche in considerazione gli esponenti con cui le grandezze dipendono da tempo e temperatura (non gli servono ulteriori grandezze perché nel suo trattato non prende in considerazione fenomeni elettromagnetici, e le grandezze che considera hanno dimensione 0 rispetto alla massa).

Come viene formalizzata oggi questa intuizione di Fourier? Per parlare di dimensione è necessario prima decidere quali sono le grandezze di base (per esempio, limitandoci alla meccanica, massa, lunghezza, tempo), in termini delle quali si possono esprimere tutte le altre. Se una grandezza Q ha come unità di misura $U_Q = U_M^{r_M} U_L^{r_L} U_T^{r_T}$ allora gli esponenti r_M, r_L, r_T saranno le dimensioni fisiche di Q. Uno dei motivi per introdurre l'uso della dimensione è proprio evitare questa pesante scrittura. Astraendo dalle scelte possibili delle unità di misura delle grandezze fondamentali, l'espressione precedente si riscrive come

$$[Q] = [M]^{r_M} [L]^{r_L} [T]^{r_T},$$

dove $[Q]$, $[M]$, $[L]$, $[T]$ sono dette dimensioni fisiche (con la notazione introdotta da Maxwell) e altro non sono che un simbolo astratto per indicare una qualunque scelta di una unità di misura. Si noti che con questa più semplice scrittura stiamo definendo la dimensione fisica $[Q]$ come la legge di dipendenza a potenza da $[M]$, $[L]$, $[T]$, e non come gli esponenti di questa legge, come fece invece Fourier: diremo che la forza ha le dimensioni di una massa per una lunghezza per il reciproco di un tempo al quadrato, e non che ha dimensioni 1 in massa, 1 in lunghezza, -2 in tempo.

5. L'analisi dimensionale

La nozione di dimensione permette di formulare il principio di omogeneità: le dimensioni dei due termini di una uguaglianza che abbia senso fisico devono essere uguali. Abbiamo visto come questo principio sia un'evoluzione dell'idea di confrontabilità tra grandezze omogenee, e abbiamo già rimarcato l'utilità didattica del controllo dimensionale e più in generale dell'attenzione alle dimensioni nelle espressioni matematiche. Però lo sviluppo più interessante di questi argomenti è la cosiddetta "analisi dimensionale", che consiste nella possibilità di dedurre informazioni su un fenomeno di cui non conosciamo compiutamente le leggi fisiche (si veda [8, 10]) e che ha la sua forma più completa nel teorema Π di Buckingham (si veda, per esempio, [7]).

L'analisi dimensionale permette di fissare alcuni aspetti di una legge fisica ancora ignota, o per fare un esempio più prosaico, che non ricordiamo completamente. Da un punto di vista didattico, è anche uno strumento utile per trarre alcune interessanti conclusioni su fenomeni la cui spiegazione completa richiede tecniche troppo avanzate per chi ascolta. Mostriamo come funziona con qualche esempio.

5.1. Meccanica classica e quantistica

Galileo Galilei fu il primo a notare l'*isocronia* delle oscillazioni di un pendolo, cioè l'indipendenza del periodo di oscillazione dall'ampiezza dell'oscillazione (ma va ricordato che l'isocronia vale solo nell'approssimazione delle piccole oscillazioni), e si chiese come il periodo dipende dalla lunghezza del pendolo. Le variabili in gioco sono ℓ, la lunghezza del pendolo, e τ il periodo di oscillazione, mentre, trascurando la presenza dell'aria e gli attriti, l'unico parametro in gioco è g, l'accelerazione di gravità, infatti, per la legge di Newton, nei fenomeni gravitazionali l'accelerazione è indipendente dalla massa. Ipotizziamo che τ dipenda da ℓ e da g mediante un prodotto di potenze

$$\tau = \eta g^a \ell^b,$$

dove η è una costante adimensionale. Il principio di omogeneità dimensionale impone che $[\tau] = [g^a \ell^b]$, e ricordando che τ è un tempo, ℓ una lunghezza e $[g] = [L]/[T]^2$, si ottiene l'equazione dimensionale

$$[T] = [L]^{a+b}[T]^{-2a},$$

che equivale a

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ -2a = 1, \end{cases}$$

e che ha come unica soluzione $a = -1/2$, $b = 1/2$. Se ne conclude che il periodo oscillazione deve essere proporzionale a $\sqrt{\ell/g}$. L'analisi dimensionale naturalmente non permette la determinazione del coefficiente di proporzionalità η, in questo caso 2π, che è un numero adimensionale. Si noti inoltre che non esistono combinazioni di potenze di ℓ e g che diano una quantità adimensionale, dunque non è possibile una dipendenza di τ da ℓ e g che non sia a potenza.

Come secondo esempio supponiamo di voler ricostruire la III legge di Keplero, quella che lega i periodi di rivoluzione dei pianeti ai semiassi maggiori dell'orbita, ricordando solo la legge di gravitazione universale, che ci dice che l'accelerazione a di un corpo in orbita è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza r dal Sole: $a = -p/r^2$, e p è una costante che non dipende dalla massa del corpo (possiamo anche ricordarci che $p = Gm_s$, dove m_s è la massa del sole e G la costante di gravitazione universale, ma non è un'informazione necessaria). L'analisi delle dimensioni dell'equazione del moto ci dice che $[p] = [L]^3/[T]^2$. Un orbita chiusa circolare di raggio R avrà un periodo che può essere solo funzione di R e di p, e, procedendo come nell'esempio precedente, è facile mostrare che l'unica combinazione di potenze di R e di p che ha come dimensioni un tempo è $(R^3/p)^{1/2}$. Dunque il quadrato del tempo di rivoluzione deve essere proporzionale al cubo del raggio.

Un esempio storicamente interessante riguarda il modello di atomo introdotto da Bohr, alla luce della teoria dei quanti che si stava sviluppando nei primi decenni del XX secolo. I lavori di Planck sulla radiazione di corpo nero e di Einstein sull'effetto fotoelettrico avevano mostrato che nell'interazione con la materia l'energia delle onde elettromagnetiche viene scambiata in modo quantizzato, cioè in multipli interi di $h\nu$ dove ν è la frequenza dell'onda elettromagnetica e h è la costante di Planck. Inoltre la scoperta delle righe spettrali di emissione degli atomi suggeriva una loro natura quantistica. Vari risultati sperimentali indicavano che la struttura dell'atomo fosse di tipo "planetario", con la carica positiva al centro e gli elettroni distanti. Questo modello non era però in accordo con l'elettrodinamica classica, che prevede che cariche accelerate (come un elettrone in orbita intorno al nucleo) emettano radiazione elettromagnetica, perdendo energia e collassando sul nucleo. Al contrario, gli atomi appaiono stabili con una distanza caratteristica degli elettroni dal nucleo, misurabile sperimentalmente.

Nei suoi lavori [11] Bohr formulò un primo modello quantistico di atomo, correggendo la teoria classica del moto di particelle che si attraggono con l'ipotesi di quantizzazione, riuscendo in questo a spiegare i risultati sperimentali sulle righe spettrali. Alla base della scoperta di Bohr c'è un argomento dimensionale, che illustriamo sinteticamente. Come abbiamo visto, nell'esempio del moto dei pianeti l'unico parametro che governa il moto è $p = Gm_s$, e quindi tutti i raggi orbitali e tutti i periodi di rivoluzione sono ammissibili. Il caso dell'attrazione coulombiana tra elettrone e nucleo non è molto diverso, perché anche in questo caso l'accelerazione è proporzionale a $1/r^2$. Infatti, per la legge di Newton

$$m_e a = -ke^2/r^2,$$

dove m_e è la massa dell'elettrone, e la sua carica, k è la costante di Coulomb. L'analisi dimensionale di questa equazione ci dice che

$$[ke^2] = [m_e a r^2] = \frac{[M][L]^3}{[T]^2}\,.$$

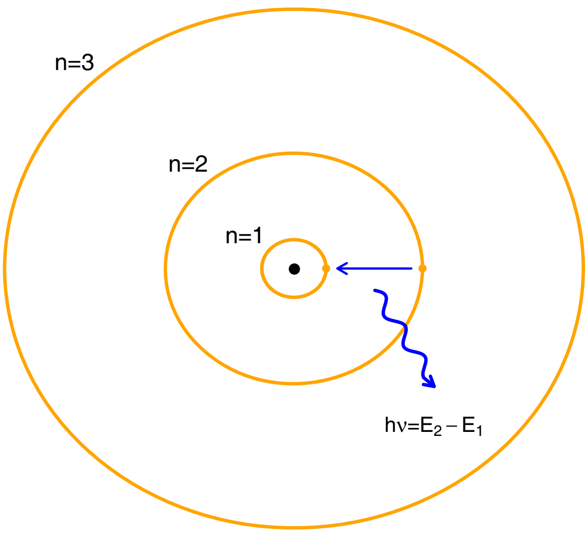

Fig. 4. – Nel modello atomico di Bohr, accoppiando la costante di Planck con le costanti dell'elettrostatica si ottiene una lunghezza a_1, detta raggio di Bohr, che è la distanza dell'elettrone dal nucleo nella configurazione di minima energia. Bohr mostra che le possibili distanze sono pari a $a_1 n^2$, con n numero intero, mentre i valori possibili dell'energia E_n sono proporzionali a $1/n^2$, in accordo con i valori delle frequenza delle righe spettrali [11].

Nei fenomeni quantistici compare invece la costante di Planck che ha le dimensioni di una energia per tempo: $[h] = [M][L]^2/[T]$. È facile mostrare che dividendo h^2 per $m_e k e^2$ si ottiene una lunghezza, che deve essere caratteristica per un atomo quantistico, e infatti il suo valore è proprio dell'ordine di grandezza del valore misurato sperimentalmente della distanza dell'elettrone dal nucleo dell'atomo di idrogeno. L'esistenza di questa lunghezza caratteristica, in accordo con i dati sperimentali, permette di costruire una teoria che predice che l'elettrone possa avere solo certe distanze dal nucleo e certe energie (fig. 4). Oggi la lunghezza $a_1 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2}$, con $\hbar = h/(2\pi)$ è detta "raggio di Bohr" dell'atomo.

5.2. Fluidodinamica

L'analisi dimensionale è uno strumento indispensabile nello studio dei fluidi (gas o liquidi), infatti le equazioni della fluidodinamica coinvolgono molte grandezze fisiche e molti parametri, e gli strumenti analitici sono di difficile utilizzo. A seconda del fenomeno, i valori dei parametri in gioco permettono di trascurare alcune delle grandezze fisiche, e in questo modo si può ridurre la complessità del problema e si possono ottenere importanti informazioni dall'analisi dimensionale.

Consideriamo, per esempio, una esplosione in un punto dell'atmosfera, il cui effetto si propaga in una onda d'urto sferica, che contiene gas ad altissima temperatura. Ci chiediamo come dipenda la velocità dell'onda d'urto dalla distanza R dal punto di esplosione. Le variabili in gioco saranno l'energia E liberata dall'esplosione, la densità

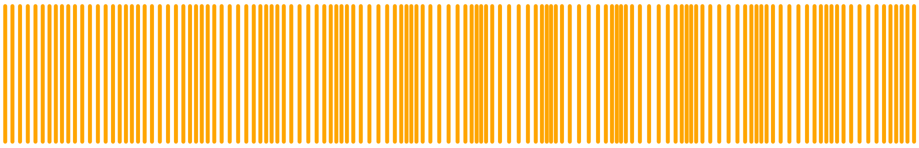

Fig. 5. – Il suono è un'onda di compressione/rarefazione che si propaga in un mezzo. La velocità del suono in un gas si determina usando le equazioni della gasdinamica nel caso adiabatico, ed è pari a $\sqrt{\gamma P/\rho}$, dove P è la pressione, ρ la densità del gas e γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica. L'analisi dimensionale permette di determinare facilmente l'andamento della velocità in P e ρ, senza conoscere le equazioni della gasdinamica.

dell'aria ρ che ostacola l'avanzata del fronte, la distanza R, la velocità del fronte v. Ipotizziamo di poter determinare v come

$$v = \eta E^a \rho^b R^c,$$

dove η è una costante adimensionale. Passando alle dimensioni

$$\frac{[L]}{[T]} = [v] = \left(\frac{[M][L]^2}{[T]^2}\right)^a \left(\frac{[M]}{[L]^3}\right)^b [L]^c = [M]^{a+b}[L]^{2a-3b+c}[T]^{-2a}.$$

Dunque a, b, c devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ 2a - 3b + c = 1, \\ -2a = -1, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $a = 1/2$, $b = -1/2$, $c = -3/2$. Si può dunque concludere che la velocità del fronte a distanza R è proporzionale a $R^{-3/2}$. Si noti che anche in questo caso non esiste un prodotto di potenze di E, ρ, R che sia adimensionale, e dunque l'unica possibile dipendenza di v da queste grandezze è a potenza. Procedendo in questo stesso modo si può determinare, a meno di costanti, il valore di E conoscendo R a un dato tempo τ dopo l'esplosione. Così fece un fisico degli anni '50, calcolando il valore dell'energia del primo esperimento atomico, che era un segreto di stato, osservando una foto della sfera di fuoco, incautamente diffusa dalle autorità (vedi [7]).

Consideriamo ora un caso opposto al precedente, quello dalla trasmissione di un'onda sonora, che è una piccola perturbazione dello stato di quiete. Il suono è un'onda di compressione che si propaga in un materiale (fig. 5). Poiché si tratta di onde di piccola ampiezza, come abbiamo fatto per il pendolo è ragionevole fare una teoria della loro propagazione che non dipenda dall'ampiezza. Per un fluido fermo in equilibrio termodinamico, le variabili in gioco sono la densità del fluido ρ, la pressione P la temperatura T, che però sono legate tra loro dall'equazione di stato. Scegliamo come variabili indipendenti P e ρ, le cui dimensioni si possono esprimere in termini di massa, lunghezza e tempo. Poiché P ha le dimensioni di una forza su una superficie e ρ ha le dimensioni di una massa su un volume, il rapporto P/ρ ha le dimensioni di una velocità al quadrato:

$$[P/\rho] = \frac{[M]\,[L]}{[T]^2}\,\frac{1}{[L]^2}\,\frac{[L]^3}{[M]} = \frac{[L]^2}{[T]^2}\,.$$

Dunque la velocità del suono in un gas è proporzionale alla radice del rapporto tra pressione e densità. Osserviamo inoltre che la legge di stato dei gas perfetti afferma che $P/\rho = rT$, dove r è la costante dei gas specifica, proporzionale all'inverso della massa molare. Otteniamo così che la velocità è anche proporzionale alla radice della temperatura e, approssimativamente, all'inverso della radice del peso atomico. Per esempio, a temperatura fissata, la velocità del suono nell'elio è circa $\sqrt{14/2} = \sqrt{7} \approx 2.6$ volte la velocità del suono nell'azoto (e quindi nell'aria). Da qui si può partire per spiegare il cambiamento di frequenza della voce umana in una atmosfera di elio.

Consideriamo ora il moto ondoso superficiale in acque profonde. Anche in questo caso trascuriamo l'ampiezza delle onde, e trascuriamo la profondità che assumiamo praticamente infinita. Inoltre, trascurando l'attrito viscoso, l'unico parametro in gioco è l'accelerazione di gravità. Dunque la velocità delle onde può dipendere solo dall'accelerazione di gravità g e dalla lunghezza dell'onda ℓ e l'unico possibile prodotto di potenze di queste due grandezze che ha le dimensioni di una velocità è $\sqrt{\ell g}$. Se ne conclude che in mare aperto le onde più lunghe sono più veloci. Nel caso opposto di "acque basse" non si può trascurare la profondità z dell'acqua. Poiché z e ℓ hanno entrambe le dimensioni di una lunghezza, l'analisi dimensionale permette solo di concludere che la velocità dell'onda è $f(\ell/z)\sqrt{\ell g}$, dove f è una funzione ignota della variabile adimensionale ℓ/z. Metodi analtici permettono di mostrare che la velocità v dell'onda è in effetti data da

$$v^2 = \frac{\ell g}{2\pi}\tanh\frac{2\pi z}{\ell}\,.$$

Si noti che la dipendenza dalla variabile adimensionale non è a potenza.

Concludiamo osservando che un'altra conseguenza dell'analisi dimensionale è che qualunque legge della fisica si deve poter esprimere in variabili adimensionali, in termini di identità che coinvolgono solo numeri puri, numeri ottenuti mediante opportune combinazione delle grandezze in gioco e delle costanti fisiche.

Questo approccio è particolarmente fruttuoso nello studio dei fluidi, il cui comportamento è governato da numerosi parametri adimensionali, che distinguono i diversi "regimi". Per esempio, piccoli valori del numero di Mach, che è il rapporto, adimensionale, tra la velocità del suono e la velocità tipica di un fluido in movimento, indicano che si può considerare incomprimibile il moto del fluido. Il numero di Reynolds Re, è il rapporto, adimensionale, tra le forze di inerzia e le forze viscose e un suo alto valore permette di considerare non viscoso il moto del fluido. Inoltre il valore Re governa le caratteristiche della turbolenza. Una delle conseguenze pratiche più rilevanti di quest'analisi è la possibilità di studiare un fenomeno facendo esperimenti su modelli in scala ridotta, che vanno realizzati tenendo costanti i parametri adimensionali che governano il fenomeno. È questo il caso delle gallerie del vento.

Per altri esempi dell'uso dei parametri adimensionali e dell'analisi dimensionale, tra cui una prova del teorema di Pitagora basata sull'analisi dimensionale e una discussione sulla possibile dimensione frattale della struttura alveolare dei polmoni, rimandiamo al testo di Barenblatt [7].

* * *

Gli autori ringraziano Clara Frontali per le molte e interessanti discussioni sull'argomento.

Bibliografia

[1] Euclide, *Tutte le opere*, a cura di Fabio Acerbi (Bompiani, Milano).
[2] Sonin A. A., *The Physical Basis of Dimensional Analysis*, second edition (Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge) 2001.
[3] Carboni D. e De Vicenzi M., "Storia dei sistemi di misura: un problema tecnico e sociale" in *L'unificazione metrologica: le vicende non concluse di un complesso percorso storico e geografico* (CNR, Istituto di Biometeorologia, Firenze) 2013.
[4] Bridgman P. W., *Dimensional Analysis* (Yale University Press, London) 1922.
[5] Needham J., Ling W. e Girdwood Robinson K., *Science and Civilisation in China*, Vol. **4** - *Physics and Physical Technology, Part I: Physics* (Cambridge University Press, Cambridge) 1962.
[6] Vogel H. U., "Aspects of Metrosophy and Metrology during the Han Period", *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, **16** (1994) 135.
[7] Barenblatt G. I., *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics* (Cambridge University Press, Cambridge) 1996.
[8] Macagno E. O., "Historico-critical review of dimensional analysis", *J. Franklin Inst.*, **292** (1971) 391.
[9] Fourier J., *Théorie analitique de la chaleur*, in *Oeuvres de Fourier*, Vol. **1** (Gauthier-Villars, Paris) 1888-1890.
[10] Martins R. De A., "The origin of dimensional analysis", *J. Franklin Inst.*, **311** (1981) 331.
[11] Bohr N., "On the Constitution of Atoms and Molecules", *Philos. Mag.*, **26** (1913) 1.